

## 2012年北约自主招生数学试题

1. 求  $x$  的范围使得  $|x+2| + |x| + |x-1|$  是增函数.
2. 求  $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}} = 1$  的实根的个数.
3. 已知  $(x^2 - 2x + m)(x^2 - 2x + n) = 0$  的 4 个根组成首项为  $\frac{1}{4}$  的等差数列, 求  $|m - n|$ .
4. 如果锐角  $\triangle ABC$  的外接圆圆心为  $O$ , 求  $O$  到三角形三边的距离比 (用三角形的角和三角函数表示).
5. 已知点  $A(-2, 0), B(0, 2)$ , 若点  $C$  是圆  $x^2 - 2x + y^2 = 0$  上的动点, 求  $\triangle ABC$  面积的最小值.
6. 在  $1, 2, \dots, 2012$  中取一组数, 使得任意两数之和不能被其差整除, 最多能取多少个?
7. 求使得  $\sin 4x \sin 2x - \sin x \sin 3x = a$  在  $[0, \pi)$  有唯一解的  $a$ .
8. 求证: 若圆内接五边形的每个角都相等, 则它为正五边形.
9. 求证: 对任意的正整数  $n$ ,  $(1 + \sqrt{2})^n$  必可表示成  $\sqrt{s} + \sqrt{s-1}$  的形式, 其中  $s \in \mathbb{N}^+$ .