§3 数论不等式

1. **素数不等式**:设$\{p_n\}$是由小到大排列的素数序列,p表示素数,则

(1) $p_n < 2^{2^n}$. (3.1)

提示:用数学归纳法.

(2) $p_{n+2} \leqslant 2^{2^n} + 1$, (3.2)

(3) 存在两个正常数c_1, c_2,使得

$$c_1 n\ln n < p_n < c_2 n\ln n.\text{(见[76]P107)} \tag{3.3}$$

(4) $x > 1$时,$\sum\limits_{p\leqslant x}\dfrac{\ln p}{p} \leqslant 2\ln x$;和$\sum\limits_{p\leqslant x}\dfrac{\ln p}{p-1} \geqslant \ln x - 1 - \dfrac{\ln x}{x}$; (3.4)

而当$1 < y \leqslant x$时,$\sum\limits_{y<p\leqslant x}\dfrac{1}{p} \leqslant 2\dfrac{\ln x}{\ln y}$,(见[89]P19) (3.5)

(5) 若$x \geqslant 1$,则存在正常数c,使得

$$\left|\sum_{p\leqslant x}\frac{\ln p}{p} - \ln x\right| < c.\text{(见[76]P103 - 105)} \tag{3.6}$$

(6) 设复数z的实部$\mathrm{Re}z = a > 0$,则

$$\left|\frac{1}{(p-1)^z} - \frac{1}{p^z}\right| \leqslant \frac{|z|}{(p-1)^{a+1}}. \tag{3.7}$$

见[89]P40.

(7) 设$a > 1$,则

$$\left|\sum_{p<N}\ln\left(1-\frac{1}{p^a}\right) + \sum_{p<N}\frac{1}{p^a}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}; \tag{3.8}$$

$$\left|\ln\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a} - \sum_{p}\frac{1}{p^a}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}. \tag{3.9}$$

见 Korner T. W. ,Fourier analysis,Cambridge,1988,P526.

2. 设$\pi(x)$表示不超过x的素数p的个数,即$\pi(x) = \sum\limits_{p\leqslant x}1$.则:

(1)　$$\pi(n) > \begin{cases} n^{1/\sqrt{2}}, & n \geqslant 149, \\ \dfrac{n}{\ln n - (1/2)}, & n \geqslant 67, \\ \dfrac{2n}{3\ln n}, & n \geqslant 200; \end{cases} \tag{3.10}$$

(2)　$$\frac{n\ln 2}{\ln(2n)} < \pi(2n) \leqslant \frac{n\ln 64}{\ln n}; \tag{3.11}$$

(3)　$$\pi(2n) - \pi(n) < (\ln 4)\left(\frac{n}{\ln n}\right); \tag{3.12}$$

(4)　令 $q(n) = \pi(2n) - \pi(n)$，则

$$n^{q(n)} < \binom{2n}{n} < (2n)^{\pi(2n)}. \tag{3.13}$$

(5)　$n \geqslant 859$ 时，$\pi(\pi(n)) > \sqrt{n}$.（见[305]1990,97E3385）　(3.14)

(6)　[MCM]. 设 $a > 1$，则 $\log_a n \geqslant (\log_a 2)\pi(n)$.　(3.15)

特别，取 $a = 10$，得到 $\lg n \geqslant (\lg 2)\pi(n)$.

证　记 $k = \pi(n)$，对于给定的 n，它的 k 个不同的素因数记为 $p_1, p_2, \cdots, p_k$，且

$n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_j}$. 令 $q = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j$. 因为 $\forall p_j \geqslant 2$. 所以，$n \geqslant 2^q \geqslant 2^k$，由此得出(3.15)式.

(7)　**Chebyshev 不等式**：存在两个正常数 c_1, c_2，使得 $c_1 \leqslant 1 \leqslant c_2$，且

$$c_1 \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < c_2 \frac{x}{\ln x}. \tag{3.16}$$

实际上 $c_1 \geqslant \frac{1}{2}\ln 2, c_2 \leqslant 2\ln 2$. Chebyshev 还证明，存在 x_0，使得 $x \geqslant x_0$ 时，$c_1 = 0.92129\cdots, c_2 = 1.10555\cdots$，更确切地说，设

$\liminf\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{(x/\ln x)} = a_1, \limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi(x)}{(x/\ln x)} = a_2$，则

$$c_1 \leqslant a_1 \leqslant 1 \leqslant a_2 \leqslant \frac{6}{5}c_1 = c_2. \tag{3.17}$$

用积分方法，易证

$$\frac{1}{8}\left(\frac{n}{\ln n}\right) \leqslant \pi(n) \leqslant 12\left(\frac{n}{\ln n}\right). \tag{3.18}$$

(8)　**Rosser 不等式**：当 $17 \leqslant x \leqslant e^{100}, x \geqslant e^{200}$ 时，有

$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 2}. \tag{3.19}$$

而当 $x \geqslant 55$ 时，有

$$\frac{x}{\ln x + 2} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 4}. \tag{3.20}$$

（见[318]1939,45(2):21－44）

(9)　令 $\mathrm{li}\,x = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + \cdots + \frac{(n-1)!\,x}{(\ln x)^n} + 0\left(\frac{x}{(\ln x)^{n+1}}\right)$. 则

$$\pi(x) = \mathrm{li}\,x + 0(x\exp(-c\sqrt{\ln x})).$$

对任意小的 $a > 0$ 和任意大的 m，成立 **Chebyshev 不等式**：

$$\mathrm{li}x - ax(\ln x)^{-m} < \pi(x) < \mathrm{li}x + ax(\ln x)^{m}. \tag{3.21}$$

(见 Ivic, A., The Riemann-zeta function. Wiley, 1985)

(10) $x > 9$ 时, $\pi(x) \leqslant x/2$. 由此推出 $\pi(2^{k+1}) \leqslant 2^k$.

(11) 记 $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$, 则当 $n \geqslant 2$ 时, $\frac{1}{8} \leqslant \pi(n)\frac{S_n}{n} < 6$. (3.22)

以上不等式见[76]94 - 99.

(12) 由遍历全部素数幂 p^m 的和式

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqslant x} \ln p, \tag{3.23}$$

称为 Chebyshev 函数, 由于 $\psi(x)$ 的最佳逼近就是 x 本身, 所以, 在研究素数分布时用 $\psi(x)$ 比 $\pi(x)$ 更方便. 若 $a = \ln(2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}30^{1/30})$, 则当 $x > 1$ 时,

$$ax - \frac{5}{2}\ln x - 1 < \psi(x) < \frac{6}{5}ax + \frac{5}{4\ln 6}(\ln x)^2 + \frac{5}{4}\ln x + 1. \tag{3.24}$$

见 Ivic, A., Zhe Riemann zeta function, Wiley, 1985.

利用 $\psi(x) \leqslant \pi(x)\ln x$ 和 $\psi(x) \geqslant \alpha\{\pi(x) - x^{\alpha}\}\ln x \quad (0 < \alpha < 1, x > 1)$, 得到 $\psi(x) \sim x(x \to \infty)$.

3. **Euler 函数不等式**: 小于 n 且与 n 互素的正整数的个数, 称为 Euler 函数, 记为 $\varphi(n)$, 在推导 $\varphi(n)$ 不等式时, 要注意利用它的基本性质, 例如 $\varphi(n)$ 是积性的, 即 $\varphi(1) = 1$, 若 m, n 互素, 则 $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$; $\sum_{d \mid n}\varphi(d) = n$; 若 $n = \prod_{k=1}^{m} p_k^{n_k}$, 式中, $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 为互异素数(称为 n 的标准分解), 则

$$\varphi(n) = n\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \prod_{k=1}^{m}(p_k^{n_k} - p_k^{n_k - 1}), \tag{3.25}$$

特别地, p 为素数时 $\varphi(p) = p - 1, \quad \varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

(1) $n \geqslant 3$ 时, 存在正常数 a, 使得

$$a \cdot \frac{n}{\ln\ln n} \leqslant \varphi(n) \leqslant n. \tag{3.26}$$

(2) $\liminf_{n \to \infty} \varphi(n)\frac{\ln\ln n}{n} = e^{-c}$, (式中 c 为 Euler 常数.). (3.27)

(3) $\sum_{n \leqslant x}\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\ln x)$. (参看[76]、[89]与[102]). (3.28)

4. **除数函数不等式**: n 的各因子之 α 次幂的和, 即

$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d \mid n} d^{\alpha}, \tag{3.29}$$

称为除数函数, 其中 α 实数(复数). 特别 $\alpha = 0$ 时, $\sigma_0(n)$ 常记为 $d(n)$ 或 $\tau(n)$, 即 $d(n) = \sum_{d \mid n} 1$, 它表示 n 的正因子个数; 而 $\alpha = 1$ 时 $\sigma_1(n)$ 常记为 $\sigma(n)$, 它表示 n 的正因子之和. 若 p 为素数, 则

$$\sigma_\alpha(p^n) = \begin{cases} \dfrac{p^{\alpha(n+1)} - 1}{p^{\alpha} - 1}, & \alpha \neq 0, \\ n + 1, & \alpha = 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

对于 n 的标准分解:设 $p_1,\cdots,p_m$ 为互异素数,有

$$n=\prod_{k=1}^{m}p_k^{n_k}\quad(\text{当 } p_1<p_2<\cdots<p_m \text{ 时}, m\leqslant(\ln n)/\ln 2). \tag{3.31}$$

$$d(n)=\prod_{k=1}^{m}(n_k+1), \tag{3.32}$$

$$\sigma(n)=\prod_{k=1}^{m}\frac{p_k^{n_k+1}-1}{p_k-1}. \tag{3.33}$$

(1) $\forall\varepsilon>0, n>n_0(\varepsilon)$,成立

$$d(n)<\exp\{(1+\varepsilon)\ln 2\frac{\ln n}{\ln\ln n}\}; \tag{3.34}$$

另一方面,$\forall\varepsilon>0,\exists n>0$,使得

$$d(n)>\exp\{(1-\varepsilon)\ln 2\frac{\ln n}{\ln\ln n}\}; \tag{3.35}$$

(2) **Dirichlet 渐近式**:$D(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}d(n)=x\ln x+(2c-1)x+\Delta(x),\quad(3.36)$

式中 $\Delta(x)=0(\sqrt{x})$.但 $\Delta(x)$ 真正的阶还不知道.

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n}d(k)=n(\ln n+2c-1)+0(\sqrt{n})$,式中 c 为 Euler 常数. (3.37)

(4) $\dfrac{1}{n}\sigma(n)\geqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

提示:将 n 的因子按递增次序 $d_1=1,d_2,\cdots,d_m=n$,于是 $\dfrac{n}{d_1},\dfrac{n}{d_2},\cdots,\dfrac{n}{d_m}$,是同样的因子序列,但次序相反,它们的和相同,所以,

$$\sigma(n)=\sum_{d_k\mid n}\frac{n}{d_k},\qquad\text{即}\quad\frac{\sigma(n)}{n}=\sum_{d_k\mid n}\frac{1}{d_k}.$$

猜想:$\dfrac{1}{n}\sigma(\varphi(n))\geqslant\dfrac{1}{2}$. (3.38)

(5) 存在无穷多个 n,使得 $1\leqslant k<n$ 时,成立

$$\frac{\sigma(n)}{n}>\frac{\sigma(k)}{k}. \tag{3.39}$$

若 $\forall k<n$,(3.39) 式成立,则称 n 为过剩数.

(6) [MCU]. $\dfrac{n^2}{2}<\varphi(n)\sigma(n)<n^2$. (3.40)

证 由 n 的标准分解(3.31) 和(3.33) 式,有

$$\sigma(n)=\prod_{k=1}^{m}(1+p_k+\cdots+p_k^{n_k})=n\prod_{k=1}^{m}(1+\frac{1}{p_k}+\cdots+\frac{1}{p_k^{n_k}}), \tag{3.41}$$

于是从(3.41) 和(3.25) 式,有

$$\varphi(n)\sigma(n)=n^2\prod_{k=1}^{m}(1-p_k^{-(n_k+1)})<n^2.$$

另一方面,

$$\prod_{k=1}^{m}(1-\frac{1}{p_k^2})>(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{(k+2)^2})>\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot(1-\int_4^{\infty}\frac{dx}{x^2})=\frac{1}{2}.$$

于是，$\varphi(n)\sigma(n)\geqslant n^2\prod_{k=1}^{m}(1-\frac{1}{p_k^2})>\frac{1}{2}n^2$.

注　$\varphi(n)\sigma(n)$ 的下界可改进为 $6(\frac{n}{\pi})^2$. 见[102].

(7)　$d(mn)\leqslant d(m)d(n)$.　　(3.42)

(8)　**Polya 不等式**：令 $f_\alpha(n)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_\alpha(k)=\sum_{k=1}^{n}[\frac{n}{k}]k^\alpha$.　　(3.43)

$\zeta(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^z}$ 为 Riemann zeta 函数. 则当 $\alpha>1$ 时，有

$$\left|\frac{f_\alpha(n)}{n^{\alpha+1}}-\frac{\zeta(\alpha+1)}{\alpha+1}\right|\leqslant\frac{2\zeta(\alpha)-1}{n}. \tag{3.44}$$

提示：因为 $\alpha>1$ 时，$g(x)=[\frac{1}{x}]x^\alpha$ 为 $[0,1]$ 上有界变差函数，而且 $(\alpha+1)\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}k\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}(\alpha+1)x^\alpha\mathrm{d}x=\zeta(\alpha+1)$，而 g 的全变差 $V_0^1(g)=|g(1)-g(\frac{1}{2}+0)|+|g(\frac{1}{2}-0)-g(\frac{1}{2}+0)|+|g(\frac{1}{2}-0)-g(\frac{1}{3}+0)|+\cdots=(1^{-\alpha}-2^{-\alpha})+2^{-\alpha}+2(2^{-\alpha}-3^{-\alpha})+3^{-\alpha}+\cdots=2\zeta(\alpha)-1$. 再利用

$\left|\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}g(\frac{k}{n})\right|\leqslant\frac{1}{n}V_0^1(g)$.（见第 13 章 N41(2). 和[56]Vol. 1:58,258)

5.　**Möbius 函数不等式**：

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & 若\ n=1,\\ (-1)^k, & k\ 为\ n\ 的素因子个数,\\ 0, & n\ 有素数的平方因子.\end{cases} \tag{3.45}$$

称为 Möbius 函数，$\mu(n)$ 在数论、代数、组合数学等领域中都有重要应用.

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)=\begin{cases}1, & 若\ n=1,\\ 0, & 若\ n>1.\end{cases} \tag{3.46}$$

若 $(m,k)=n$，由于 $\sum_{d\mid n}\mu(d)=1$ 或 0 可判别 m,k 是否互素. 当 $\mathrm{Re}\alpha>1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^\alpha}=\frac{1}{\zeta(\alpha)}.$$

(1)　设 $x\geqslant1$，则

$$\left|\sum_{1\leqslant k\leqslant x}\frac{\mu(k)}{k}\right|\leqslant1. \tag{3.47}$$

证明见[76]P120.

(2)　$\frac{1}{x}\left|\sum_{k\leqslant x}\mu(k)\right|\leqslant\exp\{-a(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-1/5}\}$，　　(3.48)

式中 a 为常数，由它可推出自然数列中素数分布的渐近规律.

(3)　猜想：存在常数 c 与正常数 ε，使得

$$\sum_{k=1}^{n}\mu(k)\leqslant cn^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{3.49}$$

猜想(3.49)式与著名的 Riemann 猜想等价. 见[305]1981,88:311 - 320.

6. [MCU]. 设 $\sigma(n)$ 是 n 的最大奇因子,则对于所有 n,有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k}-\frac{2n}{3}\right|<1. \tag{3.50}$$

提示:令 $S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma(k)}{k}$, $F(n)=S(n)-2n/3$. 用数学归纳法证明:

$$0<F(n)<2/3. \tag{3.51}$$

事实上, $F(1)=S(1)-2/3=1/3$, (3.51)式成立, 设 $n\leqslant k$ 时, (3.51)式成立: $0<F(k)<2/3$. 利用关系式: $\sigma(2m+1)=2m+1$, $\sigma(2m)=\sigma(m)$, 将 $S(n)$ 的和式按项的奇偶性分部相加得

$$S(2n)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\sigma(2m)}{2m}+\sum_{m=1}^{n}\frac{\sigma(2m-1)}{2m-1}=\frac{1}{2}S(n)+n.$$

从而 $F(2n)=\frac{1}{2}F(n)$, $F(2n+1)=F(2n)+\frac{1}{3}$. 于是

$$F(k+1)=\begin{cases}F(k)+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}F\left(\frac{k}{2}\right)+\frac{1}{3}, & \text{若 } k \text{ 为偶数},\\ \frac{1}{2}F\left(\frac{k+1}{2}\right), & \text{若 } k \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

由归纳假定即知 $0<F(k+1)<2/3$. 因此(3.51)式对所有 n 均成立.

注 (3.51)式比(3.50)式更为精确.

7. **大筛法不等式**:设 $n_1,\cdots n_m$ 是不大于 N 的正整数列,素数 $p\leqslant\sqrt{N}$, l 为余数, $0\leqslant l\leqslant p-1$. 设

$$Q(p,l)=\sum_{\substack{n_k\equiv l(\bmod p)\\ n_k\leqslant N}}1. \tag{3.52}$$

则存在正常数 c,使得

$$\sum_{p\leqslant\sqrt{N}}\left|p\sum_{l=1}^{p-1}\left(Q(p,l)-\frac{m}{p}\right)^2\right|\leqslant cNm. \tag{3.53}$$

(Bombieri. E., 1965)

8. **数列密度不等式**:数列的密度 $d(A)$ 是全体自然数组成的数列中属于给定的由整数 $a_0=0<1<a_1<a_2<\cdots<a_k$ 组成的数列 $A=\{a_k\}$ 的那一部分的测度,即

$$d(A)=\inf_{n}\frac{A(n)}{n}, \quad \left(\text{其中}\quad A(n)=\sum_{1\leqslant a_k\leqslant n}1.\right) \tag{3.54}$$

(1) Shnirel'man 不等式:

$$d(A+B)\geqslant d(A)+d(B)-d(A)d(B). \tag{3.55}$$

(2) Mann-Dyson 不等式:

$$d(A+B)\geqslant\min\{d(A)+d(B),1\}. \tag{3.56}$$

(见 Ostmann, H. H., Additive Zahlentheorie, Springer, 1956)

9. **高斯函数 $[x]$ 不等式**:设 x 为任一实数, Z 为整数集, $[x]=\max\{n: n\leqslant x, n\in Z\}$ 表示不大于 x 的最大整数,称为高斯函数,即 x 的整数部分. $\{x\}=x-[x]$ 称为 x

的小数部分.

在推导$[x]$的不等式时,要注意有关等式,例如$n\in Z$时,

$$[-x]=\begin{cases}-[x]-1, & 若\ x\ 不是整数,\\ -[x], & 若\ x\ 为整数;\end{cases}\qquad \{-x\}=1-\{x\};$$

$$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right];[n+x]=n+[x]; \tag{3.57}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right]=[nx]. \tag{3.58}$$

(1) $[x]$是x的递增函数,即$x_1<x_2$时 $[x_1]\leqslant[x_2]$.

(2) $x-1<[x]\leqslant x<[x]+1;\ 0\leqslant\{x\}<1.$ (3.59)

(3) $[x]=0\Leftrightarrow 0\leqslant x<1$;若$[x]=[y]$,则$|x-y|<1$.

(4) $[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1;$ (3.60)

$$\sum_{k=1}^{n}[x_k]\leqslant\left[\sum_{k=1}^{n}x_k\right]. \tag{3.61}$$

特别: $n[x]\leqslant[nx].$ (3.62)

(5) $[x]-[y]-1\leqslant[x-y]\leqslant[x]-[y].$ (3.63)

(6) $\{x+y\}\leqslant\{x\}+\{y\}.$ (3.64)

(7) $\sum_{k=1}^{m}[nx_k]\geqslant(n-1)\left[\sum_{k=1}^{m}x_k\right]+\sum_{k=1}^{m}[x_k].$ (3.65)

特别: $[nx]+[ny]\geqslant(n-1)[x+y]+[x]+[y].$

$$\sum_{k=1}^{m}[nx_k]\geqslant\left[\sum_{k=1}^{m}x_k\right]+(n-1)\sum_{k=1}^{m}[x_k]. \tag{3.66}$$

(8) 当$1\leqslant n\leqslant 5$时,

$$[nx]+[ny]\geqslant[x]+[y]+[(n-2)x+y]+[x+(n-2)y]. \tag{3.67}$$

当$n\geqslant 6$时,上式不成立.特别$n=5$时得到:

$$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x]+[x]+[y]. \tag{3.68}$$

(3.68)式是下述[MCM]的改进:

$$[5x]+[5y]\geqslant[3x+y]+[3y+x].$$

见张宁生等,北京师院学报,1992,3:82－87和[38]P579－580.

(9) 若$x,y\geqslant 0$,则$[x][y]\leqslant[xy]$. (3.69)

(10) 若$x\geqslant 1,y>0$,则

$$\left[\frac{y}{x}\right]\leqslant\frac{[y]}{[x]}. \tag{3.70}$$

证 令$z=\dfrac{y}{x}$,则

$[y]=[zx]=[([z]+\{z\})([x]+\{x\})]=[[z][x]+[z]\{x\}+\{z\}[x]+\{z\}\{x\}]$.由于$x\geqslant 1,y>0,z>0$,所以,$[z]\{x\}+\{z\}[x]+\{z\}\{x\}\geqslant 0$,从而$[y]=[zx]\geqslant[[z][x]]=[z][x]$.由此得出(3.69).

(11) 设$x>0$,则

$$\frac{[nx]}{n} \leqslant \frac{[n!x]}{n!};\tag{3.71}$$

$$0 \leqslant [nx] - n[x] \leqslant n - 1.\tag{3.72}$$

证　因为 $0 \leqslant \{x\} < 1$，对给定的 n，总存在自然数 k，$1 \leqslant k \leqslant n$，使得 $\frac{k-1}{n} \leqslant \{x\} < \frac{k}{n}$. 从而 $[n\{x\}] = k - 1$，于是，

$[nx] = [n[x] + n\{x\}] = n[x] + [n\{x\}] = n[x] + k - 1 \leqslant n[x] + n - 1$，此即(3.72)式右边不等式，由(3.62)式知，(3.72)式左边不等式对所有实数 x 成立.

(12)　[MCM]. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{k} \leqslant [nx]$.　(3.73)

证　用数学归纳法，当 $n = 1,2$ 时，(3.73)式显然成立，设(3.73)式对 $m \leqslant n - 1$ 均成立，令

$f(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{k}$，则 $f(n) = f(n-1) + \frac{[nx]}{n}$，即

$$nf(n) - nf(n-1) = [nx].\tag{3.74}$$

从而

$$(n-1)f(n-1) - (n-1)f(n-2) = [(n-1)x],$$

$$\cdots\cdots$$

$$2f(2) - 2f(1) = [2x], f(1) = [x].$$

将以上各式相加得

$$nf(n) - \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} [kx].\tag{3.75}$$

由归纳假设，$f(m) \leqslant [mx]$，$1 \leqslant m \leqslant n - 1$.　(3.76)

于是 $nf(n) \leqslant \sum\limits_{m=1}^{n-1} [mx] + \sum\limits_{k=1}^{n} [kx] = n[nx]$. 即 $f(n) \leqslant [nx]$. 证毕.

(13)　$x > 0$ 时，$n[x] \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{[kx]}{k}$.　(3.77)

(14)　设 $x > 0$，$1 \leqslant m \leqslant n$，$k \leqslant x < k + 1$. 若 $k + \frac{m-1}{n} \leqslant x < k + \frac{m}{n+1}$，则

$$[nx] \geqslant \frac{n}{n+1}[(n+1)x];\tag{3.78}$$

若 $k + \frac{m}{n+1} \leqslant x < k + \frac{m}{n}$，则

$$[nx] < \frac{n}{n+1}[(n+1)x].\tag{3.79}$$

(董义宏，数学教学研究，1998，2:42 - 43)

(15)　设 m, n 为整数，且 $n > 0$，则

$$0 \leqslant n\left\{\frac{m}{n}\right\} \leqslant n - 1.\tag{3.80}$$

(16)　设 $f(n) = \sqrt{2}n - [\sqrt{2}n]$，$m > n > 1$，则

$$|f(m)-f(n)|>\frac{1}{4(m-n)}. \tag{3.81}$$

(17) **Vinogradov 不等式**:设 f 在$[a,b]$上有二阶连续导数,且满足

$\frac{1}{p}\leqslant|f''(x)|\leqslant\frac{k}{p}$,$(p>2,k\in N)$.则

$$\left|\sum_{a<x\leqslant b}\{f(x)\}-\frac{1}{2}(b-a)\right|<\frac{2k^2(b-a)\ln p+8kp}{p^{1/3}}. \tag{3.82}$$

证明见[76]P147.

10. 设$f(n)$是定义于自然数集 N 上的复值函数.对于固定的 k,当 $n_1\equiv n_2 \pmod k$ 时,$f(n_1)=f(n_2)$,$|f(n)|\leqslant 1$,而当$(n,k)>1$时,$f(n)=0$,$\sum_{n=1}^{k}f(n)=0$,则

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}f(n)/n\right|<\log k-1/k. \tag{3.83}$$

证明见[77]P.47.

11. 设 $n_1<n_2<\cdots<n_k\leqslant 2k$,其中任意两个自然数的最小公倍数大于 $2k$,则

$n_1>[2k/3]$

证明:用反证法.设 $n_1\leqslant[2k/3]$,则 $3n_1\leqslant 2k$.考虑 $2n_1,3n_1,n_2,\cdots,n_k$ 这 $k+1$ 个整数的集合,没有一个能被另一个整除,这是不可能的.证毕.

12. 设 $n_0<n_1<n_2<\cdots<n_m$,$[n_k,n_j]$表示自然数 n_k,n_j 的最小公倍数,则

$$S_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{[n_{k-1},n_k]}\leqslant 1-2^{-m}. \tag{3.84}$$

提示:用数学归纳法直接证 $S_m\leqslant 1-2^{-m}$ 是很困难的.用“加强命题”技巧,再用数学归纳法易证 $S_m\leqslant n_0^{-1}(1-2^{-m})$.事实上,当 $m=1$ 时,由 $n_0<n_1$ 得$[n_0,n_1]\geqslant 2n_0$,即 $\frac{1}{[n_0,n_1]}\leqslant\frac{1}{2n_0}=\frac{1}{n_0}\left(1-\frac{1}{2}\right)$.若 $S_m\leqslant(1-2^{-m})n_0^{-1}$ 成立,则

$$S_{m+1}\leqslant\frac{1}{[n_0,n_1]}+\frac{1}{n_1}(1-2^{-m});$$

当 $n_1\geqslant 2n_0$ 时,从$[n_0,n_1]\geqslant n_1\geqslant 2n_0$ 知

$$S_{m+1}\leqslant\frac{1}{2n_0}+\frac{1}{2n_0}(1-\frac{1}{2^m})=\frac{1}{n_0}(1-2^{-(m+1)}).$$

当 $n_1<2n_0$ 时,设 n_0,n_1 的最大公约数为 d,即 $n_0=pd$,$n_1=qd$,其中 p,q 为互素的自然数,且$[n_0,n_1]=pqd$.又由于 $n_0<n_1<2n_0$,故 $p+1\leqslant q<2p$.从而

$$\frac{1}{[n_0,n_1]}+\frac{1}{n_1}(1-2^{-m})-\frac{1}{n_0}(1-2^{-(m+1)})=\frac{1}{pqd}+\frac{1}{qd}(1-2^{-m})-\frac{1}{pd}(1-2^{-(m+1)})$$

$$=\frac{1}{d}(\frac{1+p-q}{pq}+\frac{q-2p}{pq}2^{-(m+1)})<0,$$

于是 $S_{m+1}\leqslant(1/n_0)(1-2^{-(m+1)})$,证毕.

13. [MCM].设 m 个自然数 $n_k(1\leqslant k\leqslant m,m\geqslant 3)$ 排成一圈时,间隔相邻的两数之和与中间数之比 $f(k)=(n_k+n_{k+2})/n_{k+1}$ 都是自然数,则

$$2m \leqslant \sum_{k=1}^{m} f(k) \leqslant 3m, \tag{3.85}$$

式中 $n_{m+j} = n_j, j = 1,2$. 提示:用数学归纳法.

14. **Fibonacci 数列不等式**:若数列 $\{F_n\}$ 满足 $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} (n \geqslant 3)$ 时称为 **Fibonacci 数列**,它的基本性质有:

(1) $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}. \tag{3.86}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1; \quad \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} F_k = 1 - F_{2n-1}. \tag{3.87}$$

(3) $$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n}; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1. \tag{3.88}$$

(4) $$\sum_{k=1}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}. \tag{3.89}$$

(5) $\{F_n\}$ 的母函数是 $$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n;. \tag{3.90}$$

(6) $$F_{n+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} F_k \leqslant F_{n+2}. \tag{3.91}$$

(7) $$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} < F_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}. \tag{3.92}$$

证 利用(3.86)式.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 所以, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是 $\dfrac{F_n}{F_{n+1}}$ 的最佳逼近分数.

(8) **Shapiro 不等式**:

$$F_n F_m < F_{n+m}; \quad F_n^m < F_{nm}. \tag{3.93}$$

提示:先证明 $F_{n+m} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.

(9) 若在十进制记数下, F_n 的位数为 $N(n)$, 则当 $n \geqslant 17$ 时, $\dfrac{n}{5} \leqslant N(n) \leqslant \dfrac{n}{4}$.

(10) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{2^k} < 2.$$

注 为整数序列 $\{L_n\}$ 满足: $L_1 = 1, L_2 = 2, L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, (n \geqslant 3)$, 则称 $\{L_n\}$ 为 **Lucas 数列**,它满足:

(11) $$1 + \frac{1}{L_n^{1/n}} \leqslant L_{n+1}^{1/n}. \tag{3.94}$$

(12) 当 n 为奇数时,成立

$\operatorname{arccot} L_{n-1} < \operatorname{arccot} L_n + \operatorname{arccot} L_{n+1}$, (见[345]2003,5:47 - 48)

$\{F_n\}$、$\{L_n\}$ 都可看成二阶循环级数 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 的特例,详见周持中的专著:“斐波那契—卢卡斯序列及其应用”,湖南科学技术出版社,1993.

15. **连分数不等式**:设 a_k 为实数,则

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}} \tag{3.95}$$

称为有限连分数,记为$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$,特别当 a_1 为整数,$a_2,\cdots,a_n$ 为正整数时,(3.95)式称为简单连分数,(3.95) 式中的 a_k 也可推广到复数或一般的函数.

$[a_1,a_2,\cdots,a_k]=\dfrac{p_k}{q_k}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ 称为(3.95) 的第 k 个渐近分数. 于是

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_1}{1},\frac{p_2}{q_2}=a_1+\frac{1}{a_2},\frac{p_3}{q_3}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}},$$

一般地,p_n,q_n 满足递推关系:

$$\begin{aligned}&p_1=a_1,q_1=1,p_2=a_2a_1+1,q_2=a_2,\cdots,\\&p_k=a_kp_{k-1}+p_{k-2},q_k=a_kq_{k-1}+q_{k-2}.\end{aligned} \tag{3.96}$$

每个有限简单连分数都表示一个有理数,而每个无限简单连分数表示一个实数.

(1)　简单连分数的渐近分数的分母 q_n 是递增的,即 $1=q_1\leqslant q_2<\cdots$,而且当 $n>2$ 时.

$$q_n\geqslant\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}. \tag{3.97}$$

(2)　任意连分数的渐近分数必满足:

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_5}{q_5}<\cdots<\frac{p_6}{q_6}<\frac{p_4}{q_4}<\frac{p_2}{q_2}. \tag{3.98}$$

即 $\dfrac{p_{2k-3}}{q_{2k-3}}<\dfrac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}<\dfrac{p_{2k}}{q_{2k}}<\dfrac{p_{2k-2}}{q_{2k-2}}$;而且

$$0<\frac{p_{2k}}{q_{2k}}-\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}=\frac{1}{q_{2k}q_{2k-1}}\leqslant\frac{1}{(2k-1)(2k-2)}. \tag{3.99}$$

(3)　设 α 为无理数,则

$$\frac{1}{2q_{n+1}q_{n+2}}<\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_{n+1}^2}, \tag{3.100}$$

事实上,$\dfrac{p_n}{q_n}$ 是 α 的最佳逼近,即若 $0<q\leqslant q_k$,$\dfrac{p}{q}\neq\dfrac{p_n}{q_n}$,则

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|.$$

例如圆周率 π 的前几个渐近分数为$\dfrac{3}{1},\dfrac{22}{7},\dfrac{333}{106},\dfrac{355}{113},\dfrac{103993}{33102},\cdots,$

$$\left|\pi-\frac{355}{113}\right|<\frac{1}{113\times 33102}<\frac{1}{10^6}.$$

设$\dfrac{p_n}{q_n},\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ 分别是实数 α 的连分数展开式中第 n 个和 $n+1$ 个渐近分数,则

$$\left|\alpha-\frac{p_n}{q_n}\right|>\left|\frac{p_n+p_{n+1}}{q_n+q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})}.$$

注　连分数的一般形式是

$$f = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + a_3 \cdots}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \cdots,$$

有限连分数 $f_n = \dfrac{A_n}{B_n} = b_0 + \dfrac{a_1}{b_1 +} \dfrac{a_2}{b_2 +} \cdots \dfrac{a_n}{b_n}$.

若 $\forall a_k, b_k > 0$,则 $f_{2n} < f_{2n+2}, f_{2n+1} < f_{2n-1}$.(见[101]P.19)

(4) **Dirichlet 不等式**:对任意实数 α 和 $\beta > 1$,必存在有理数 p/q,使得

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q\beta},\ q \leqslant \beta. \tag{3.101}$$

(5) **Hurwitz 不等式**:对任意实数 α,必存在无限多个有理数 p/q,使得

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} q^2}. \tag{3.102}$$

式中$\sqrt{5}$ 是最佳常数.

(3.101)式和(3.102)式均可用连分数理论证明,华罗庚在[76]P143 – 145 中用 n 级 Farey 序列的性质证明;还可用抽屉原理证明:考虑 $q+1$ 个实数 $\beta_k = k\alpha - [k\alpha], 0 \leqslant k \leqslant q$,它们分布在半开区间$[\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q})$内,$0 \leqslant k \leqslant q-1$,这 q 个区间的并集是半开区间$[0, 1)$,它包含上述 $q+1$ 个实数$\{\beta_k\}$,于是有一个半开区间至少包含两个不同的 β_k,记为 β_k,β_m. 于是 $|\beta_k - \beta_m| \leqslant \frac{1}{\beta}$. 记 $k - m = q, [k\alpha] - [m\alpha] = p$,则 $1 \leqslant q < \beta$,且(3.101)式成立.

设$\sqrt{\alpha}$ 为无理数,r 为有理数且满足 $r < \sqrt{\alpha} < r+1$,则

$$r + \frac{a - r^2}{2r+1} < \sqrt{\alpha} < r + \frac{a - r^2}{2r+1} + \frac{1}{4(2r+1)}.$$

注 从 Hurwitz 不等式(3.102)可看出,任何无理数 α,都存在无限多个有理数 p/q 作为它的近似值,并且可以达到 $1/q^2$ 的精确度,反之,若存在 $\delta > 0$ 及有理数列 $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$,使得$\left| \alpha - \dfrac{p_n}{q_n} \right| < \dfrac{1}{q_n^{(1+\delta)}}$,则 α 必为无理数. 1978 年,法国阿贝瑞由此证明了$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ 为无理数,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2k+1}}$($k \geqslant 2$)是否为无理数仍未解决.

(6) 设 α 是实 n 次代数数,则只存在有限个有理数 p/q,使得

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^{n+1}}, q > 0. \tag{3.103}$$

Thue 不等式:设 α 是次数 $n \geqslant 3$ 的代数数,则

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^s} \tag{3.104}$$

当 $s > \dfrac{n}{2} + 1$ 时只有有限多组整数解 p 和 $q > 0$,(p 和 q 互素),Siegel 证明(3.104)式对 $s > 2\sqrt{n}$ 时成立. 见[354]1921,10:173 – 213.

(7) **Thue-Siegel-Roth 不等式(TSR 不等式)**:设 α 是无理代数数,$\delta > 0$ 任意小,则

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^{2+\delta}} \tag{3.105}$$

只有有限多组整数解 p 和 $q>0$ （p 和 q 互素）.

（8）　**Roth 不等式**：设 α 为无理代数数，则 $\forall\delta>0,\exists c=c(\delta)>0$，使得 $|\alpha-(p/q)|>cq^{-(2+\delta)}$.（见[107]3:181）

16.　**Diophantus 不等式**：Diophantus 问题的原始含义是求方程的整数解，或有理数解，并给出这些解的界限，我们可将方程的系数和解的范围扩大，如代数整数、代数数、多项式、有理函数或代数函数，在多项式的情形，则要求控制多项式解的次数，关于 Diophantus 问题的解的大小的不等式通称为 Diophantus 不等式.

（1）　**Khinchin 不等式**：设 $\varphi(k)>0$ 是对整数 $k>0$ 定义的一个单调递减函数，若级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(k) \tag{3.106}$$

发散，则对几乎所有的实数 α，

$$\|\alpha k\|<\varphi(k) \tag{3.107}$$

在整数 $k>0$ 中有无穷多个解，其中 $\|x\|$ 是 x 到最近整数的距离，“几乎所有”是指在相应空间的 Lebesgue 意义下，更一般地，若

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi(k))^{m}$$

发散，则对几乎所有 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in R^n$，

$$\max\{\|\alpha_1k\|,\|\alpha_2k\|,\cdots,\|\alpha_nk\|\}<\varphi(k) \tag{3.108}$$

有无穷多个解.

由此可推出：对几乎所有实数 α，存在无穷多个有理逼近 p/q，使得

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2\ln q}; \tag{3.109}$$

反之，任给 $\varepsilon>0$.

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2(\ln q)^{1+\varepsilon}}. \tag{3.110}$$

只能对测度为零的数 α 的集合有无穷多个解. 见 Cassels, J. W. S., An introduction to diophantine approximation, Cambridge, Univ. Press, 1957.

1976 年，Montgomery, H. L. 提出，是否对每个无理数 α 及每个 $\varepsilon>0$，都存在无穷多个素数 p，q，满足

$$\left|\alpha-\frac{1}{q}\right|<\frac{1}{q^{2-\varepsilon}}. \tag{3.111}$$

见 Proc. of Symposia in Pure Math. 1976, 28: 307 - 310.

（2）　**Mahler 不等式**：1932 年，Mahler 提出猜想：对几乎所有（在 Lebesgue 测度意义下）的数 $\omega\in R^1$，

$$|P_n(\omega)|\leqslant|H(P_n)|^{-n-\varepsilon} \tag{3.112}$$

只有有限多个次数不超过 n 的多项式 $P_n(x)$ 成立，其中 $\varepsilon>0$，$H(P_n)$ 是 P_n 的系数绝对

值的最大值.与之等价的叙述是:对于几乎所有的 $\omega \in R^1$.

$$\max\{\|\omega q\|,\cdots,\|\omega^n q\|\} < q^{-\frac{1}{n}-\varepsilon} \tag{3.113}$$

只有有限多个整数解 q,其中 $\|\alpha\|$ 是 α 到最近整数的距离:1964 年 Sprindzhuk, V. G,证明了上述猜想,见[321]1932,106:131 - 139,和 Amer. Math. Soc. 1969.

(3) 1990 年 Lang S. 在一篇综合报告中谈到了 Diophantus 不等式的新旧猜想,见 Bulletin(New Series) of AMS, 1990, 23(1):37 - 75.

17. 对于任意实数 α 和任意自然数 n,成立

$$\prod_{k=0}^{n}|\alpha-k| \leqslant \|\alpha\|\frac{n!}{2^n}. \tag{3.114}$$

其中 $\|\alpha\|$ 表示 α 最接近于整数的距离.

证 设 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 表示集合 $\{0,1,\cdots,n\}$ 中的数,且满足 $|\alpha-\alpha_0| \leqslant |\alpha-\alpha_1| \leqslant \cdots \leqslant |\alpha-\alpha_n|$,对于每个自然数 k,位于区间 $(\alpha-k/2,\alpha+k/2)$ 内属于上述集合的数不多于 k 个,因此,$|\alpha-\alpha_k| \geqslant k/2,(1\leqslant k\leqslant n)$.又因为 $|\alpha-\alpha_0| \geqslant \|\alpha\|$,所以

$$\prod_{k=0}^{n}|a-k| \geqslant \|a\|\frac{n!}{2^n}.$$

注 这种证明方法称为**逻辑推理法**.这类方法在国内外数学竞赛中是经常出现的,而学校教学中又往往缺乏这方面的内容,因此,应该引起重视.

18. [MCU].(1) 任给 $\varepsilon>0$,可找自然数 n,使得

$$\left|\sin n-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon. \tag{3.115}$$

证明:记 $n(\bmod 2\pi)$ 为这样的数 x; $-\pi\leqslant x<\pi$:使得对于整数 $k\geqslant 0$,有 $n=2k\pi+x$.又记 $\Delta(\varepsilon)=(\arcsin((1/2)-\varepsilon),\arcsin((1/2)+\varepsilon))$.不难看出,存在这样的自然数 n,使得 $n(\bmod 2\pi)\in\Delta(\varepsilon)$.设 σ 为区间 $\Delta(\varepsilon)$ 的长度,自然数 $m>\frac{2\pi}{\sigma}+1$,点 $1(\bmod 2\pi),\cdots,m(\bmod 2x)$ 位于区间 $(-\pi,\pi)$ 上,因此有这样的 $i,j,(1\leqslant i<j\leqslant m)$,使得

$$|j(\bmod 2\pi)-i(\bmod 2\pi)|<\frac{2\pi}{m-1}<\sigma.$$

记 $r=j-i$,得到 $|r(\bmod 2\pi)|<\sigma$,所求的 n 使得 $n(\bmod 2\pi)\in\Delta(\varepsilon)$.现在不难得出 n 为 r 的倍数.

(2) 设 m 不是平方数,则 $|\sin(\pi n\sqrt{m})| \geqslant (n\cdot\sqrt{m}+1)^{-1}$.

证 设 k 满足 $k<n\cdot\sqrt{m}<k+1$,因为 k^2,n^2m 为自然数,于是 $k^2+1\leqslant n^2m \leqslant k^2+2k$.

① 若 $k<n\sqrt{m}<k+(1/2)$,则

$$|\sin(\pi n\sqrt{m})| \geqslant |\sin\pi\sqrt{k^2+1})| = \sin\pi(\sqrt{k^2+1}-k)$$

$$=\sin\frac{\pi}{\sqrt{k^2+1}+k}>\sin\frac{\pi}{2(k+1)}>\frac{1}{k+1}>\frac{1}{1+n\sqrt{m}};$$

② 若 $k+\frac{1}{2}<n\sqrt{m}<k+1$,则

$$|\sin(\pi n\sqrt{m})|>\left|\sin(\pi\sqrt{k^2+2k})\right|=\sin\pi(k+1-\sqrt{k^2+2k})$$
$$=\sin\frac{\pi}{k+1+\sqrt{k^2+2k}}>\sin\frac{\pi}{2(k+1)}>\frac{1}{k+1}>\frac{1}{1+n\sqrt{m}}.$$

19. **联立渐近不等式**:对于任意 n 个实数 $a_1,\cdots,a_n$,都存在不同时为零的整数 $k_1,\cdots,k_n$,及自然数 m,使得

$$\left|a_j-\frac{k_j}{m}\right|\leqslant\frac{n}{n+1}\cdot m^{-(1+1/n)},1\leqslant j\leqslant n. \tag{3.116}$$

提示:用重积分计算以原点为对称中心的 $n+1$ 维凸体的体积,然后用几何算术平均不等式.类似可证明:

若 $a_k=\beta_k+i\gamma_k$ 是 n 个复数,则存在 $n+1$ 个复数 $z_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 和 ω,使得

$$\left|a_k-\frac{z_k}{\omega}\right|\leqslant\frac{n}{n+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{2n}}|\omega|^{-(1+1/n)}. \tag{3.117}$$

见[76]P619 - 620.

20. **Mahlc 不等式**:存在 $1<m<n$,使得

$$\frac{1}{m^{42}}<\left|\pi-\frac{n}{m}\right|<\frac{\pi}{2m}. \tag{3.118}$$

(见 Indag Math. 1953,15:30 - 42).由此推出

$$\frac{2}{\pi n^{41}}<\frac{2}{\pi}|n-m\pi|<|\sin(n-m\pi)|=|\sin n|<1.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin n|^{1/n}=1$.

21. **Dirichlet 特征标不等式**:设 $\varphi(n)=\varphi(n,k)$ 满足: (1) $\varphi(n)\neq0$; (2) $\varphi(n)\varphi(m)=\varphi(nm)$; (3) $\varphi(n)=\varphi(n+k)$,则称 $\varphi(n)$ 是模 k 的 Dirichlet 特征标,特征标的和函数为

$$S(n,m)=\sum_{j=m+1}^{n}\varphi(j). \tag{3.119}$$

若 $\varphi_0(n)=\begin{cases}1, 若(n,k)=1,\\0, 若(n,k)\neq1,\end{cases}$ 则称 $\varphi_0(n)$ 为主特征标.

若(3.119)式中的 $\varphi(j)$ 是模 k 的非主特征标,则成立 **Vinogradov 不等式**:

$S(n,m)\ll\sqrt{k}\ln k$.当 k 为素数时,

$$S(n,m)\ll k^{\beta}(n-m)^{1-\frac{1}{r}}\ln k,式中\ \beta=\frac{r+1}{4r^2}.r=1,2,\cdots.$$

Vinogradov 猜想:对任给 $\varepsilon>0,1\leqslant m<n$,有

$$|S(n,m)|\ll k^{\varepsilon}(n-m)^{1/2}. \tag{3.120}$$

见 Vinogradov, I. M., Selected works, Springer, 1985.

22. **陈景润不等式**:设 $P_x(1,2)$ 表示将 x 表为一个素数与两个素数乘积之和的表示法,则

$$P_x(1,2)\geqslant\frac{0.8xc_x}{(\ln x)^2}.$$

(见[364]1978.5)