第八章　其他函数不等式

§1　单调函数不等式

一、基本概念和性质

定义 1　设 f 是定义在 R^1 的子集 E 上的有限函数，若 $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2, f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 f 在 E 上递增；若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 f 在 E 上严格递增；若 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 f 在 E 上递减；若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 f 在 E 上严格递减，递增与递减统称为单调，即

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \text{ 当 } \Delta x > 0 \text{ 时不变号}.$$

定义 2　设 f 定义在 (a,b) 上，若 $\forall x \in (a,b), h > 0, x + kh < b, 1 \leqslant k \leqslant n$，$f$ 的 k 阶差分

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jh) \geqslant 0 \quad (\text{或} \leqslant 0),$$

则称 f 是 **n 阶单调的**，若 $\forall n$，f 在 (a,b) 内为 n 阶单调，则称 f 在 (a,b) 内是**绝对单调的**. 由此推出，f 在 (a,b) 内绝对单调时，f 在 (a,b) 内的一切阶导数 $f^{(n)}$ 存在并且有相同的符号.

定义 3　设 $f \in C^\infty(a,b)$ 且 $(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant 0, x \in (a,b), \forall k \in N$，则称 f 在 (a,b) 内**完全单调**.

定义 4　若对某个实数 a，$f(x) + ax$ 是 $[a,b]$ 上单调函数，则称 f 是 $[a,b]$ 上**单调型函数**.

定义 5　若 f 定义在 $(-\infty, \infty)$ 上，且当 $y > x, y - x \to 0, x \to \infty$ 时 $\liminf\{f(y) - f(x)\} \geqslant 0$，则称 f 是**慢递减函数**.

由定义 5 可推出，存在正数 δ 和与 δ 有关的 x_0, η，使得当 $x \geqslant x_0, 0 \leqslant y - x \leqslant 2\eta$ 时，成立　$f(y) - f(x) \geqslant -\delta/2$.（见[76]$P$.242 − 243）

定义 6　设 f 及其各阶导数都在 (a,b) 上不变号，且

$$f^{(k)}(x) f^{(k+2)}(x) \leqslant 0, x \in [a,b],$$

则称 f 是 (a,b) 上**循环单调函数**.

由此可推出 $\forall k \in N$，

$$\left| f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leqslant \left(\frac{2}{b-a}\right)^k \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|.$$

见[21]P557.

定义 7　设$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0, \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 1, b_1 < b_2 < \cdots < b_n$,则 f 在 x 的 GRD 导数(广义黎曼导数)定义为

$$(Df)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} a_k f(x + hb_k).$$

若上式右边的极限改为下极限,则称为 f 在 x 点的 GRD 下导数$(\underline{D}f)(x)$.

设 f 在$[a,b]$上连续,且 $b_1 < 0 < b_2 < b_3, b_2 = b_1 + b_3, a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 > 0$, $(\underline{D}f)(x) \geqslant 0, x \in (a,b)$,则 f 是递增函数.(Humke, P.D., [378], 1989, 38(3): 437 - 454.)

定义 8　设 $-\infty < \alpha_0 < \alpha_1 < \infty, f(x)x^{-\alpha_0}$ 在$(0,\infty)$上递增,$f(x)x^{-\alpha_1}$ 在$(0,\infty)$上递减,则称 f 是$(0,\infty)$上拟单调函数.(见[317]1998, 57(2): 363 - 370)

单调函数的概念可推广到多元函数,如:

定义 9　设 f 定义于 R^n 中 n 维闭方体 Q 上.若 $\forall x = (x_1,\cdots,x_n), y = (y_1,\cdots,y_n) \in Q$. $x_k \leqslant y_k (1 \leqslant k \leqslant n), f(x) \leqslant f(y)$,(或 $f(x) \geqslant f(y)$),称 f 在 Q 上递增(或递减).设 $x_0 \in Q, \forall t \in R^1$. $\{f = t\} = \{x \in Q: f(x) = t\}$ 称为 f 的水平集.若 $\forall t, \forall y \in Q - \{f = t\}$, y 在 Q 中与 x_0 不被$\{f = t\}$所分隔,且 $f(y) < t$.(或 $f(y) > t$);而对 $\forall z \in Q - \{f = t\}$, z 在 Q 中与 x_0 被$\{f = t\}$所分隔,且 $f(z) > t$(或 $f(z) < t$)则称 f 在 x_0 **递增(或递减)**.

定义 10　设 X 为 Banach 空间,X^* 为 X 的共轭空间.$f \in X^*$ 在 $x \in X$ 的值记为(f, x).算子 $T: X \to X^*$,若 $\forall x_1, x_2 \in X$. $\mathrm{Re}(Tx_1 - Tx_2, x_1 - x_2) \geqslant 0$,则称算子 T **是单调的.**

函数单调性的判别,常用的方法有:

(1)　若 $f'(x) \geqslant 0$(或 > 0),$x \in (a,b)$,则 f 在(a,b)上递增(或严格递增).这个条件还可减弱,例如:

(2)　设 $f \in AC[a,b]$(即 f 在$[a,b]$上绝对连续),且 $f'(x) \geqslant 0$, $a.e.\ x \in [a,b]$,则 f 在$[a,b]$上递增.

(3)　设 f 在闭区间$[a,b]$上连续,若 $\forall x \in (a,b)$,单侧导数 $f'_+(x)$ 或 $f'_-(x)$ 非负　(可能为 ∞),则 f 在$[a,b]$上递增.

(4)　设 f 在闭区间$[a,b]$上连续,若 $\forall x \in (a,b)$, f 的 Schwarz 导数 $f'_s(x) = \lim_{h\to+0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \geqslant 0$(可能为 ∞),则 f 在$[a,b]$上递增.

(5)　利用 f 的 Dini 导数

$$D^+ f(x) = \lim_{h\to+0} \sup \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, (h \to -0 \text{ 时为 } D^- f(x))$$

$D_+ f(x) = \lim_{h\to+0} \inf \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ($h \to -0$ 时为 $D_- f(x)$).若 $D_+ f(x) \geqslant 0$, $a.e.\ x \in [a,b]$ 且 $D_+ f(x) > -\infty, x \in [a,b]$.则 f 在$[a,b]$上递增.

若 f 在$[a,b]$上连续,且存在$[a,b]$中的零测度集 A,使得 $\forall x \in [a,b] - A, D^+$

$f(x)\geqslant 0$ 或 $D^- f(x)\geqslant 0$(可取 ∞). 而 $\forall x\in A$(可能要去掉一个可数集),$D^+ f(x)$ 或 $D_- f(x) > -\infty$,则 f 在$[a,b]$上递增.(见[305]1986,93(6):471 - 475)

(6) 设 f 在$(0,\infty)$上可导,则 f 的导数f'递增的充要条件是$f(x)-xf'(x)$递减;f'严格递增的充要条件是$f'+af$(a 为实数)严格递增.

(7) 若 f 在$(0,a)$上非负递增,$p>0$,则 $G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x t^p f(t)\mathrm{d}t$ 在$(0,a)$上也递增.

推广:设在$[a,b]$上 f 非负递增,g 非负递减. 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\qquad G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

$E=\{x\in[a,b]:G(x)\neq 0\}$. 则 $h=F/G$ 在 E 上递增.(Mott,T.E.,[305]1963,70:195 - 196)由此可推出:设 f 在$[a,b]$上递增,则 $\forall x\in(a,b)$ 成立:

$$\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{b-x}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(Mott,T.E.,[305]1963,70:195 - 196).

(8) 设 $P_n(x)=x^n+\sum_{k=0}^{n-1}c_k x^k$ 为 n 阶实系数多项式. 则 $F_n(x)=P_n(x)[e-(1+\frac{1}{x})^x]$ 完全单调的充要条件是 $n=1$. 且 $c_0\geqslant\frac{11}{12}$; 而 $G_n(x)=P_n(x)\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+1}-e\right]$完全单调的充要条件是$n=1$,且 $c_0\geqslant\frac{1}{12}$.

(9) 设 $f(x)=\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x+b}-e^a$,$a<0$,$b$ 为实数,则 f 完全单调的充要条件是$a\leqslant 2b$.

(10) Bernstein 定理:设 μ 为$[0,\infty)$上非负测度,则 f 完全单调的充要条件是 $\forall x>0$,积分 $f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}\mathrm{d}\mu(t)$ 收敛.

(8) ~ (10) 见 Ann. Acad. Sci. Fennicae, Series A; J. Mat. 2002,27(2):445 - 460.

(11) 复合函数的单调性:设 $u=g(x)$ 的定义域为 A,值域 $D\subset B$,$y=f(u)$ 定义在集 B 上,若 g,f 分别在 A,B 上同时递增(或递减),则复合函数 $f\circ g$ 在 A 上递增;若 g 与 f 有相反方向的单调性,g 递增(或递减),而 f 递减(或递增),则 $f\circ g$ 在 A 上递减.

定义 11 设 X 为 Hilbert 空间. $T:X\to X$ 为非线性算子. 若 $\forall u,v\in X$,$(Tu-Tv,g(u)-g(v))\geqslant 0$,则称 T 为 g 单调算子;若从$(Tu,g(v)-g(u))\geqslant 0$ 可推出$(Tv,g(v)-g(u))\geqslant 0$,则称 T 为 g 伪单调算子.(见[301]2003,277(2):379 - 394)

二、 单调函数不等式

1. 设 f,g 在区间$[a,\infty)$上连续,在区间(a,∞)上可导,若 $f(a)-g(a)=q<0$ 且对于任意 $x\in(a,\infty)$,有 $f'(x)-g'(x)\geqslant p>0$,则当 $x>a-q/p$ 时,$f(x)>g(x)$.

提示:$F(x)=f(x)-g(x)$ 严格递增.

2. 设 g 递增且 $x \geqslant x_0$ 时，$|f'(x)| \leqslant g'(x)$，则当 $x \geqslant x_0$ 时，

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant g(x) - g(x_0).$$

3. 设：(1) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0), k = 0,1,\cdots,n-1$,

(2) $x > x_0$ 时，$f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$，则 $x > x_0$ 时，$f(x) > g(x)$.

注 从这个不等式出发可以证明一系列重要的不等式.

4. 设 x_k, p_k 均为正数，$k = 1,\cdots,n$，则

$$\left(\sum p_k\right)\varphi\left(\sum x_k\right) \leqslant \sum p_k\varphi(x_k)$$

成立的充要条件是对于正数 x，$\varphi(x)$ 递减.若 $\varphi(x)$ 严格递减且 $n > 1$，则成立严格不等式，若 φ 递增，则不等号反向.

推论 不等式 $f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ 对于所有正数 x 成立的充要条件是 $x^{-1}f(x)$ 递减.若 $x^{-1}f(x)$ 严格递减，且 $n > 1$，则成立严格的不等式：$f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) < \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

5. 设 φ 为严格单调的连续函数，令 $M_\varphi(a) = \varphi^{-1}\left(\sum p_k\varphi(a_k)\right)$（对 k 求和均为从 1 到 n），特别，当所有 $p_k = 1$ 时，$G_\varphi(a) = \varphi^{-1}\left(\sum \varphi(a_k)\right)$.令 $q_k = p_k/\sum p_k$，则 $\sum q_k = 1$，再令 $M_\varphi^*(a) = \varphi^{-1}\left(\sum q_k\varphi(a_k)\right)$，于是有

(1) 设 φ,ψ 为严格单调的连续函数，且均为正，若 φ 递减，ψ 递增，或 φ,ψ 同时递增（或同时递减），而 ψ/φ 递减，则 $G_\varphi \leqslant G_\psi$；

(2) $2\varphi^{-1}\left(\sum p_k\varphi\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right)\right) \leqslant \varphi^{-1}\left(\sum p_k\varphi(a_k)\right) + \varphi^{-1}\left[\sum p_k\varphi(b_k)\right]$,

特别地，对于 $\varphi(x) = x^r, r > 1$，得到 Minkowski 不等式的推广（本质上等价的形式）：

① $M_\varphi^*\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\{M_\varphi^*(a) + M_\varphi^*(b)\}$,

② $G_\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\{G_\varphi(a) + G_\varphi(b)\}$,

③ $M_\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\{M_\varphi(a) + M_\varphi(b)\}$.

见[1]P91－92.

6. 设导函数 f' 在区间 $[0,c]$ 上递减，$f(0) = 0$，则对于 $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \alpha + \beta \leqslant c$，恒有 $f(\alpha + \beta) \leqslant f(\alpha) + f(\beta)$.

提示：用微分中值定理.

7. [MC].设 f 递增，$f(0) \neq 0$，且对于任意非负数 x,y，有 $f(x+y) = f(x)f(y)$，则对于任意非负数 x，存在实数 $a \geqslant 1$，使得 $a^{-1} \leqslant f(x)a^{-x} \leqslant a$.

提示：设 $[x] = n$，即 $n \leqslant x < n+1$，则 $a^n \leqslant a^x \leqslant a^{n+1}$.

8. 设在开区间 $G = (a,b)$ 上，f,g,f',g' 都是正的函数，若 f'/g' 在 G 中严格递增，则 f/g 在 G 中严格递增，或存在 $c \in [a,b)$，使得 f/g 在 (a,c) 上严格递减而在 $[c,b)$ 上严格递增（见[74]Vol.1.P.177－178）.

9. 设 $f''(x)>0, x, x_0 \in (a,b)$,令

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0\\ f'(x_0), & x=x_0,\end{cases}$$

则 φ 在 (a,b) 上严格递增.

10. 设 f 在 R^1 上递减连续,则 $F(x)=\int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$ 递增.

11. 设 f 在 R^1 上递增连续,$a>0$,则 $F(x)=\int_0^a f(x+y)\mathrm{d}y$ 在 R^1 上递增,

12. (1) 设在 $[0,a]$ 上 $f''(x)<0, f(0)=0$,则 $f(x)/x$ 在 $[0,a]$ 上严格递减;

(2) 若在 $(-\infty,\infty)$ 上 $f(0)\leqslant 0, f''(x)>0$,则 $f(x)/x$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上严格递增;

(3) 设 $x\geqslant 0$ 时,$f''(x)>0$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[xf'(x)-f(x)]\leqslant 0$,则 $x>0$ 时 $f(x)/x$,严格递减[1]P107;

(4) [MCU].设 $f''(x)>0, x\in(a,b)$,且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)/x=1$,则 $f(x)\geqslant x, x\in(a,b)$.

13. **Dini 函数不等式:** 设函数 $\omega(t)$ 当 $t>0$ 时为非负连续递增,$\omega(t)/t$ 递减且 $\int_0^1 \omega(t)/t\mathrm{d}t<\infty$,则称 $\omega(t)$ 是 $(0,\infty)$ 上的 Dini 函数.当 $0<t<1$ 时,成立

$$\omega(t)\leqslant c(\log\frac{1}{t})^{-1}.$$

证 设 $0<\varepsilon<1$,则

$$c=\int_0^1 \omega(t)/t\mathrm{d}t\geqslant\int_\varepsilon^1 \omega(t)/t\mathrm{d}t=-\omega(\varepsilon)\log\varepsilon-\int_\varepsilon^1 \log t d\omega(t)\geqslant-\omega(\varepsilon)\log\varepsilon.$$ 证毕.

14. 1980 年王忠烈猜测:设 f 在 $(0,2b)$ 上递增且有非负的三阶导数,$b>0$,则对于 $x_k\in(0,b], q_k>0, 1\leqslant k\leqslant n, Q_n=\sum\limits_{k=1}^n q_k$,有

$$\frac{\sum q_kf(x_k)}{Q_n}\leqslant f\left(\frac{\sum q_kx_k}{Q_n}\right)+f\left[f^{-1}\left(\frac{\sum q_kf(x_k)}{Q_n}\right)+f^{-1}\left(\frac{\sum q_kf(2b-x_k)}{Q_n}\right)\right]. \quad (1.1)$$

1988 年,Yang,Y.举出反例:$b=1/4, f(u)=\log u, x_k=1/4, q_k=1, 1\leqslant k\leqslant n$ 时,(1.1) 式不成立.但他证明:对于 $b>0$,(1) 成立充要条件是 $f\geqslant 0$,见[301]1988,133,(1):282.

15. 1985 年杨耀池证明:设 $f(x,y)$ 的二阶混合偏导数 $\partial^2 f/\partial x\partial y>0$,$\{a_k\}$,$\{b_k\}$ 为两个递增的非常值序列,$\{b'_k\}$ 为 $\{b_k\}$ 的任意重排,则

$$\sum_{k=1}^n f(a_k,b_{n-k+1})\leqslant\sum_{k=1}^n f(a_k,b'_k)\leqslant\sum_{k=1}^n f(a_k,b_k),$$

仅当 $\{b'_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 是同一排列时,等号成立.1988 年彭秀平将其推广到 m 元函数.见[344]1988,4:64-68.

16. 设 $g_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是区间 D 上实值函数,$\{b'_k\}$ 是 $\{b_k\}$ 的任意重排,则

$$\sum g_k(b_{n+1-k}) \leqslant \sum g_k(b'_k) \leqslant \sum g_k(b_k)$$

对所有递增序列 $\{b_k\}$ 成立的充要条件是 $g_{k+1} - g_k$ 在 D 上递增($1 \leqslant k < n$),见[305]1990,97:319 - 323.取 $g_k(x) = a_k x$,又得到第三章的排序不等式.N.86.

17. 设 f 在$[0,1]$上严格递增.$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$.

(1) 若 $a_k = (2k-1)/2n, 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\sum f(|x_k - a_k|) \leqslant \sum f(a_k);$$

(2) 若 $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant 1$,$f$ 还是凸函数,则

$$\sum f(|x_k - a_k|) \leqslant \max\{\sum f(a_k), \sum f(1 - a_k)\}.$$

见[305]1992,99(5):462.另见第 7 章 §1,N,65.

18. 设 $f(x)$ 在 $x \geqslant 1$ 时可微,且当 $x \to \infty$ 时,$f'(x)$ 递增到 ∞,则

$$0 < [f(1) + f(n)]/2 + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x < [f'(n) - f'(1)]/8.$$

([56]Vol.1.P52.)

19. 设 f 在$(0,\infty)$上递减连续,则

$$\int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x.$$

20. 若 $x \geqslant m$ 时,f 非负递增,m 为整数,则对于所有 $x \geqslant m$,有

$$\left|\sum_{m \leqslant k \leqslant x} f(k) - \int_m^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant f(x);$$

若 $x \geqslant m$ 时,f 非负递减,则

$$\lim_{n \to \infty}\left(\sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_m^n f(x)\mathrm{d}x\right) = \beta$$

存在且 $0 \leqslant \beta \leqslant f(m)$.此外,若还有 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$,则当 $x \geqslant m+1$ 时,有

$$\left|\sum_{m \leqslant k \leqslant x} f(k) - \int_m^x f(t)\mathrm{d}t - \beta\right| \leqslant f(x-1),$$

证明见[76]P.100 - 103.华罗庚在[76]中还利用这些不等式来估计许多重要的和式.匡继昌利用 Euler-Maclaurin 求和公式改进和推广了上述结果,见第 13 章或河西学院学报 2002,18(2):1 - 8.

21. 设 $x > 0$ 时,f'' 递增,则

$$\frac{x^3}{24} f''\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x f\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \frac{x^3}{24} f''(x).$$ 见[375]1986,2(4):177.

22. 设函数 f 在区间$[a,b]$上递增连续,则

$$\int_a^b x f(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当 f 递减时,不等号反向.

证 1 对于积分 $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\mathrm{d}x$ 分段使用积分第一中值定理.

证 2 对于积分 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})f(x)\mathrm{d}x$ 使用积分第二中值定理.

证 3 考虑积分 $\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})(f(x)-f(\frac{a+b}{2}))\mathrm{d}x \geqslant 0$.

证 4 从不等式 $(t-x)(f(t)-f(x)) \geqslant 0, x, t \in [a,b]$ 出发,先固定 x,对 t 积分,将所得结果再对 x 积分.

推论 令 $f(x) = -\frac{1}{x}$,可得:$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}.(b > a > 0)$.

证 5 考虑 $F(x) = \int_a^x tf(t)\mathrm{d}t - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 的单调性.

证 6 用质心公式.

证 7 利用 Chebyshev 不等式.

23. **Talenti 不等式:** 设 f 是$[a,b]$上正的递减函数,则

$\ln\left(1+\frac{1}{1+af(a)}\int_a^b f\right) \leqslant \int_a^b \frac{f(t)}{1+tf(t)}\mathrm{d}t$.(Lemmert,R. 等,[54].6)

24. [MCU].设函数 f 在区间$[0,1]$上递减,则对于所有 $a:0<a<1$,有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证 1 令 $x = at$,从 $at < t \Rightarrow f(at) \geqslant f(t)$,于是,得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = a\int_0^1 f(at)\mathrm{d}t \geqslant a\int_0^1 f(t)dt.$$

证 2 注意到当 $0 < a < 1$ 时,有 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant af(a), \int_a^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant (1-a)f(a)$,于是,

$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(a) \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.所以,$a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant (1-a)\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

再利用 $\int_a^1 f = \int_0^1 f - \int_0^a$ 即可得证

25. [MCU].设函数 f 在区间$[0,1]$上正值递减,则

$$\frac{\int_0^1 x(f(x))^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}. \tag{1.2}$$

证 1 令 $D = [0,1]\times[0,1]$,则

$$I = \int_0^1 (f(x))^2\mathrm{d}x\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 yf^2(y)\mathrm{d}y\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \iint_D f(x)f(y)y[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

交换 x, y 的位置,又得到

$$I = \iint_D f(x)f(y)x[f(y)-f(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

两式相加,得

$$2I = \iint_D f(x)f(y)(y-x)[f(x)-f(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 f 正值递减,所以 $I \geqslant 0$,它等价所要证的(1.2)式.

证 2 考虑 $F(x) = \left(\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right) - \left(\int_0^x tf^2(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$.

26.(1) **Polya 不等式**:设函数在区间$(0,\infty)$上非负递减,$a \geqslant 0, b \geqslant 0, a \neq b$,则

$$\left(\int_0^\infty x^{a+b}f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left\{1 - \left(\frac{a-b}{a+b+1}\right)^2\right\}\int_0^\infty x^{2a}f(x)\mathrm{d}x \times \int_0^\infty x^{2b}f(x)\mathrm{d}x, \qquad (1.3)$$

仅当 $f(x) = \begin{cases} c,(c>0), & 若\ 0 < x < \xi, \\ 0, & 若\ \xi < x < \infty \end{cases}$ 时,等号成立,其中 ξ 可以为0.若 f 在$(0,1)$上非负递增,则(1.3)式中不等号反向,并将积分限改为$(0,1)$,见[1]P185.

提示:利用 Cauchy 不等式及分部积分.

(2) 设 f,g,h 在$[a,b]$上非负递增,导数 g',h' 在$[a,b]$上连续,$g(a)=h(a)$, $g(b)=h(b)$,则

$$\left(\int_a^b fg'\right)\left(\int_a^b fh'\right) \leqslant \left\{\int_a^b f(\sqrt{gh})'\right\}^2.$$

见 Alzer, H. MR93h:26028.

27. **Gauss 不等式**:设 f 是$(0,\infty)$上非负递减函数,则 $\forall\, a > 0$,成立

$$3\int_0^a x^2 f(x+a)\mathrm{d}x \leqslant a^2\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{9}\int_0^\infty x^2 f(x)\mathrm{d}x.$$

(见[2]P.188).2000 年黄启亮作了参数推广:

设 $a \geqslant 0, 1 \leqslant p \leqslant \infty, 1/p + 1/q = 1$,(约定$\frac{1}{\infty} = 0$),$\alpha,\beta \geqslant 0, q\alpha \neq p\beta$,则

$$\int_0^\infty x^{\alpha+\beta}f(x)\mathrm{d}x < \lambda(\alpha,\beta,p,q)\left[\int_0^\infty x^{q\alpha}f(x)\mathrm{d}x - \omega_q(a)\right]^{1/q}\left[\int_0^\infty x^{p\beta}f(x)\mathrm{d}x - \omega_p(a)\right]^{1/p},$$

式中 $\omega_q(a) = \int_0^a\left[x^{q\alpha}f(x) - \frac{a^{q\alpha}f(a)}{q\alpha+1}\right]\mathrm{d}x \geqslant 0$,将上式中 q 换成 p,得到 $\omega_p(a)$.

$$\lambda(\alpha,\beta,p,q) = \frac{(q\alpha+1)^{1/q}(p\beta+1)^{1/p}}{\alpha+\beta+1},$$

仅当 $f(x) = \begin{cases} c,(c>0), & 0 < x < \xi, \\ 0, & \xi < x < \infty. \end{cases}$ 时等号成立.

$\lambda(\alpha,\beta,p,q)$ 为最佳常数,见华南理工大学学报 2001,29(7):1-4.

28. 设 f 为$(0,\infty)$上正值连续函数,则 $x > 0$ 时

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

是递增函数.

提示:$\varphi'(x) = \dfrac{f(x)}{\left(\int_0^x f\right)^2}\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t > 0$.

29. 设 f 是$[a,b]$上连续函数,$f'(x) \geqslant 0, x \in (a,b)$,$(p>0)$ 则 $F(x) = \frac{1}{x-a}\int_0^x [f(t)]^p \mathrm{d}t$ 是(a,b)上递增函数.

30. 设在$(0,\infty)$上,$f^{(n)}(x) > 0, n = 0,1,2,\cdots$,则 $g(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}$ 在$(0,\infty)$上递减;若 f 在$(0,\infty)$上绝对单调(见定义 2),且$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \geqslant 0$,则$\sum_{k=0}^{n} a_k f^{(k)}(x) \geqslant 0$.

(见 Fink,A. M.,[301]1982,90(1):251 - 258)

31. 设 D 为 R^1 中区间,f 在 D 上递减,g 在$[a,b]$上递增.且 $g(a), g(b) \in D$,若 $g(x) \geqslant x$,则

$$\int_a^b fg' \geqslant \int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

若 $g(x) \leqslant x$,则不等号反向.(Pecaric,J.E. Southeast Asian Bull. Math. 1989,13(2):89 - 91)

32. **Lebesgue 不等式**:设 f 在$[a,b]$上递增,则

$$\int_a^b f' \leqslant f(b) - f(a).$$

若 f 递减,则不等号反向.

33. **Young 不等式**:设当 $x \geqslant 0$ 时,$y = f(x)$ 严格递增连续且 $f(0) = 0$,f^{-1} 为 f 的反函数,则对于所有 $a,b > 0$,有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f^{-1}(y)\mathrm{d}y,$$

仅当 $b = f(a)$ 时等号成立.

特别,取 $f(x) = x^{p-1} \quad (p > 1), 1/p + 1/q = 1$,则 $ab \leqslant (a^p/p) + (b^q/q)$.

1932 年,Takahashi,T. 证明了 Young 不等式的逆定理:设 $x \geqslant 0$ 时,f,g 严格递增连续,且 $g^{-1}(x) \geqslant f(x)$,$f(0) = g(0)$,若 $\forall a,b > 0$,都有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a g(x)\mathrm{d}x,$$

则 f 与 g 必互为反函数.

所以,$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $\psi(x) = \int_0^x f^{-1}(t)\mathrm{d}t$ 称为 **Young 互补函数**.

Young 不等式已有许多推广,例如:

(1) **Oppenheim 不等式**:设 $f_k(x)$ 非负递增连续,$a_k \geqslant 0, k = 1,\cdots,n$,且至少有一个 k,使得 $f_k(0) = 0$.则

$$\prod_{k=1}^{n} f_k(a_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_0^{a_k} \prod_{j \neq k} f_j(x)\mathrm{d}f_k(x).$$

仅当 $a_1 = \cdots = a_n$ 时等号成立.证明见[317]1927,2:21 - 23.

(2) **Cooper 不等式**:设 $g_k(x)$ 严格递增连续,$g_k(0) = 0, a_k \geqslant 0, k = 1,\cdots,n$.而且

$\prod\limits_k g_k^{-1}(x) = x$.则

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_0^{a_k} \frac{g_k(x)}{x}\mathrm{d}x.$$

仅当 $g_1(a_1) = \cdots = g_n(a_n)$ 时等号成立.

证明见[317]1927,2:17 - 21,159 - 163.

(3) f 是$[0,\infty)$上严格递增连续函数,$f(0)=0$,f^{-1} 为 f 的反函数,$[x]$ 为 x 的整数部分,则 $\forall\, m,n \in N$ 成立, $mn \leqslant \sum\limits_{k=0}^{m}[f(k)] + \sum\limits_{k=0}^{n}[f^{-1}(k)]$.

(4) 1988 年徐利治证明:设 $a,b>0$,f 在$[0,\infty)$上严格递增连续且 $f(0)=0$,f^{-1} 为 f 的反函数,则

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y \leqslant af(a) + bf^{-1}(b) - f(a)f^{-1}(b),$$

若 $f(x)$ 为凸函数,则当 $f''(x)[b-f(a)] \geqslant 0$ 时,

$$ab + \frac{1}{2}[b-f(a)][f^{-1}(b)-a] \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y.$$

若 $f''(x)[b-f(a)] \leqslant 0$,则不等号反向.

而 f' 单调,记 $h = (1/n)(f^{-1}(b)-a)$,$n \geqslant 2$.

$$S_n = bf^{-1}(b) - h\Big[(f(a)+b)/2 + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\Big],\text{则}$$

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y - S_n\right| \leqslant (h^2/8)\,|\,f'(a) - f'[f^{-1}(b)]\,|.$$

见[339]1988,8(4):512.

1989 年,徐利治、邹春苓还证明了双边 Young 不等式和一个逆定理:

设 f,g 是严格递增的连续函数,$f(0)=g(0)=0$,f 定义在$[0,c]$上,$a\in[0,c]$,$b\in[0,f(c)]$,

① 若 $g^{-1}(x) \geqslant f(x)$,$\forall\, x\in[0,c]$,且

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(x)\mathrm{d}x$$

对所有 $a\in[0,c]$,$b\in[0,f(c)]$ 成立,则 $f = g^{-1}$(和 $g = f^{-1}$).

② 对所有 $a\in[0,c]$,$b\in[0,f(c)]$,有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x \leqslant af(a) + bf^{-1}(b) - f(a)f^{-1}(b).$$

③ 若 $\forall\, x\in[0,c]$,$g^{-1}(x) \leqslant f(x)$ 和 $\forall\, a\in[0,c]$,$\forall\, b\in[0,f(c)]$,有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant af(a) + bg(b) - f(a)f(b),$$

则 $f = g^{-1}$(和 $g = f^{-1}$).

作者还利用这些结果得到某些直接计算困难的定积分的上下界.见[353]1989,5(3):12 - 16.

(5) Zsolt,P.证明:设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数,且$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\geqslant 0,(x,y\geqslant 0)$,则对于任意非负数 x,y 和任意 Young 函数 φ,有

$$f(x,y)\leqslant f(0,0)+\int_0^x \frac{\partial}{\partial t}f[t,\varphi(t)]\mathrm{d}t+\int_0^y \frac{\partial}{\partial s}f[\varphi^{(-1)}(s),s]\mathrm{d}s,$$

式中 $\varphi^{(-1)}$ 表示 φ 的右逆,见[54]5(1986):471 - 472.

34. 设 f 是$[0,\infty)$上非负递减函数,且 $\forall a>0,f$ 在$[0,a]$上绝对连续,则对 $p\geqslant 1$,成立 $p\int_0^\infty x^{p-1}f^p\leqslant(\int_0^\infty f)^p$.

证 若 $f\notin L[0,\infty)$,即$\int_0^\infty f=\infty$,则上式成立.若 $f\in L[0,\infty)$,又 f 递减,所以 $f(x)\to 0(x\to\infty)$.从而

$$p\int_0^\infty (xf)^{p-1}f\leqslant p\int_0^\infty(\int_0^x f)^{p-1}f=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\int_0^x f)^p\mathrm{d}x=(\int_0^\infty f)^p.$$

35. 设 f 是$(0,1)$上正的递增函数,$1\leqslant p\leqslant q$,则

$q\int_0^1(1-t)^{q-1}f(t)^p\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^1 f\right)^p$,(Malamud,S. M.,[308]20001,129(9):2671 - 2678)

36. 设 $f_n(x)$ 在$[a,b]$上(关于 x)单调,而且$\sum_{n=1}^\infty f_n(x)=f(x)$ (在$[a,b]$上点态收敛),则 f 在$[a,b]$上也单调,且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^\infty f'_n(x)\quad a.e.\ x\in[a,b].$$

(逐次求导的 Fubini 定理).证明见[118]P.145 - 146.

37. 设 $L^n=\{f:(-1)^k f^{(k)}(t)\geqslant 0,t>0,0\leqslant k\leqslant n\}$,

$L=\{f:(-1)^k f^{(k)}(t)\geqslant 0,t>0,\forall k\in N\}$.则

$\forall\alpha>1$,当 $n\leqslant 7$ 或 $n\geqslant 13$ 时,$f\in L\Rightarrow f^\alpha\in L^n$.

([301]1997,210(1):102 - 113).我们问:$8\leqslant n\leqslant 12$ 时,有什么相应的结论?

38. 设 $-\infty<a<b\leqslant\infty,0<p\leqslant q<\infty,f$ 是$[a,b]$上正的递减可积函数,则

$$\left(\int_a^b[f(x)]^q(x-a)^{q-1}\mathrm{d}x\right)^{1/q}\leqslant p^{1/p}q^{-1/q}\left(\int_a^b[f(x)]^p(x-a)^{p-1}\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

见 Heining,H.,等[329]1995,116(2):33 - 165.2000 年,Peric 等将其推广到多元函数,见[303]2000,3(1):51 - 62.

39. 设 $a,b\in R^n,a=(a_1,\cdots,a_n),b=(b_1,\cdots,b_n)$.

若 $\forall a_k<b_k$,记为 $a<b,Q=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n],g=(g_1,\cdots,g_n)$,若 $\forall g_k(x)$ 递增,称 g 递增,而若 $\forall g_k\geqslant 0$,称 $g\geqslant 0$,记 $dg(x)=\prod_{k=1}^n dg_k(x),d(g^p(x))=\prod_{k=1}^n d[g_k^p(x_k)]$.若 $f,g\geqslant 0,f$ 递减,g 递增,且

$$\lim_{x_k\to a_k+0}g_k(x_k)=0,1\leqslant k\leqslant n.\text{若 }0<p\leqslant 1,\text{则}$$

$$\int_Q f\mathrm{d}g \leqslant \left\{\int_Q f^p \mathrm{d}g^p\right\}^{1/p}.$$

若 $1 \leqslant p < \infty$,则不等号反向.(Pecaric,J.等[369],1996,62(3 - 4):407 - 412)

40. **Stolarsky 不等式:**设 g 在$(0,1]$上递减,$0 \leqslant g(x) \leqslant 1$,$p,q > 0$,则

$$\int_0^1 g(x^{1/p})\mathrm{d}x \int_0^1 g(x^{1/q})\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 g(x^{\frac{1}{p+q}})\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

见[305]1991,98:889 - 900,1994 年 Pecaric,J.又证明了(1.4)式的反向不等式:

$g(0)Q(g,p+q) \leqslant Q(g,p)Q(g,q)$,式中

$$Q(g,p) = p\int_0^1 g(x)x^{p-1}\mathrm{d}x = g(1) - \int_0^1 x^p \mathrm{d}g(x).$$

见[305]1994,101(6):565 - 567.

41.[MCU].　设 f' 在 R^1 上有界,且 $\forall x \in R^1$,成立

$$|f(x) + f'(x)| \leqslant 1, \text{则} |f(x)| \leqslant 1.$$

42.　[MCU].　设 φ' 递增,$\varphi(0) = 0$,则 $\forall x \in (0,1)$,成立

$$\varphi'(1)x < \varphi(x) < \varphi'(0)x.$$