第十五章　概率统计不等式

本章用 $P(A)$ 表示事件的概率，ω 为基本事件，$\Omega=\{\omega\}$ 是一切基本事件的集合，称为基本事件空间．事件构成 σ 域 $\mathscr{F}$，于是，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间．设 $\xi=\xi(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实值函数，若 $\forall x\in R^1$，$\{\xi(\omega)<x\}\in\mathscr{F}$，则称 $\xi=\xi(\omega)$ 为随机变量，$F(x)=P(\xi<x)$ 称为 ξ 的分布函数．

若存在可数集合 E，使得 $P(\xi\in E)=1$，则称 ξ 为离散型随机变量．若对于所有 k，$P(\xi=x_k)=p_k\geqslant 0$，且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}p_k=1$，则称 $\{p_k\}$ 是 ξ 的概率质量函数．若分布函数 F 绝对连续，即若存在非负函数 $f(x)$，使得对每个实数 x，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t,$$

则称 ξ 是连续型随机变量，f 称为 ξ 的概率密度函数，记为 $p.d.f.$，F 称为累积分布函数，记为 $c.d.f.$，因为

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt=1,\text{所以}\quad P(a<\xi\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

设 $F(x)$ 是随机变量 $\xi=\xi(\omega)$ 的分布函数，$g(x)$ 为一元 Borel 可测函数．若 L-S 积分 $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|dF(x)<\infty$，则

$$Eg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)dF(x) \tag{①}$$

称为 $g(\xi)$ 的数学期望(亦称概率平均值)．

对于连续型分布函数 $F(x)$，若 $F'(x)=f(x)$，则 ① 式变成

$$Eg(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x. \tag{②}$$

对于密度矩阵为

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

的离散型分布 $F(x)$，① 式化为

$$Eg(\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}g(x_j)p_j. \tag{③}$$

特别地，(1) 若取 $g(x)=x^k(k\geqslant 0)$，则称 $E\xi^k$ 为 ξ 的 k 阶矩，或 k 阶原点矩，记为 m_k．$\mu_k=E[(\xi-E\xi)^k]$ 称为 ξ 的 k 阶中心矩．

(2)　若取 $g(x)=|x|^k(k\geqslant 0)$，则称 $E|\xi|^k$ 为 ξ 的 k 阶绝对矩，$v_k=E(|\xi-E\xi|^k)$ 称为 ξ 的 k 阶中心绝对矩．

(3) 若取 $g(x)=(x-E\xi)^2$.则称 $E(\xi-E\xi)^2$ 为 ξ 的方差,记为 $D\xi$,即

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2\mathrm{d}F(x). \tag*{④}$$

通常记 $\sigma=\sqrt{D\xi}$.当 $F(x)$ 为连续型或离散型时,④ 式分别化为

$$D\xi=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E\xi)^2f(x)\mathrm{d}x, \tag*{⑤}$$

$$D\xi=\sum_{j=1}^{\infty}(a_j-E\xi)^2p_j. \tag*{⑥}$$

设(ξ,η)是二维随机变量,ξ,η 的数学期望、方差都存在,则 ξ 与 η 的协方差定义为

$$\mathrm{cov}(\xi,\eta)=E(\xi-E\xi)(\eta-E\eta).$$

若 $D\xi,D\eta$ 都不为零,则称

$$\gamma=\frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

为 ξ 与 η 的相关系数.

概率论的基本概念与实分析(测度与积分)相应概念的对比见[118]P.278－279,例如,$A\subset B$ 表示事件A 发生引起事件B 发生.A^c 表示事件A 不发生,$A\cup B$ 表示事件A,B 至少有一个发生,$A\cap B$ 表示事件A,B 同时发生,等.

在本章中,若无特别声明,还统一使用以下固定的记号,$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为随机变量,$S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$,$\sigma_k^2=D(\xi_k)$,$\sigma^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$, $\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$,$E(\bar{\xi})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k)$,$\bar{\sigma}=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\right)^{1/2}$.

§1 事件概率与数字特征不等式

一、 事件概率不等式:

下面设 A,B,A_k 为任意事件.

1. 若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$;
2. $P(A\cap B)\leqslant\min\{P(A),P(B)\}\leqslant P(A\cup B)$;
3. $\max\{P(A),P(B)\}\leqslant P(A\cup B)\leqslant 2\max\{P(A),P(B)\}$;
4. $|P(A\cap B)-P(A)P(B)|\leqslant 1/4$.
5. $P(\liminf\limits_{k\to\infty}A_k)\leqslant\liminf\limits_{k\to\infty}P(A_k)\leqslant\limsup\limits_{k\to\infty}P(A_k)\leqslant P(\limsup\limits_{k\to\infty}A_k)$.(注意:$\liminf\limits_{x\to\infty}A_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n$;$\limsup\limits_{k\to\infty}A_k=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n$);
6. [MCU] $P(A\cup B)P(A\cap B)\leqslant P(A)P(B)$.
7. $P(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(A_k)$.
8. $P(\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k)\geqslant 1-\sum\limits_{k=1}^{n}[1-P(A_k)]$.
9. **Boole 不等式**:$P(A\cap B)\geqslant 1-P(A^c)-P(B^c)$.

推论 1 $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k^c)$.

推论 2 设 $P(A) = p, P(B) = 1 - \sqrt{p}, 0 < p < 1$,则 $P(A^c \cap B^c) > 0$.

10. **蕴涵法则**:若 $A_1 \cap A_2 \subset B$,则

$$P(B^c) \leqslant P(A_1^c \cup A_2^c) \leqslant P(A_1^c) + P(A_2^c).$$

11. **Bonferroni 不等式**:

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j \cap A_k) \leqslant P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

1998 年,石焕南推广为:设 $m \leqslant n$,若 m 为偶数,则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \geqslant \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j});$$

若 m 为奇数,则不等号反向,证明用数学归纳法,见[351]1998,2:17.

12. **Chung-Erdös 不等式**:若 $P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) > 0$,则

$$\left[\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right]^2 - \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leqslant 2P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \sum_{1 \leqslant j < k < n} P(A_j \cap A_k).$$

[142]P.202.

13. 若 $P(B) > 0$,则

(1) $P(A \mid B) \geqslant 1 - \dfrac{P(A^c)}{P(B)}$;

(2) $\dfrac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} \leqslant P(A \mid B) \leqslant \dfrac{P(A) + P(B)}{P(B)}$.

二、 随机变量的数字特征不等式

1. **Hölder 不等式**:设 $E(|\eta|^p) < \infty, E(|\xi|^q) < \infty, 1 < p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,则

$$E(|\xi\eta|) \leqslant [E(|\xi|^p)]^{1/p}[E(|\eta|^q)]^{1/q}.$$

仅当存在两个不全为零的常数 α, β,使得 $P(\alpha|\xi|^p + \beta|\eta|^q = 0\} = 1$ 时等号成立.

特别地,$p = q = 2$ 时,得到 **Cauchy-Schwarz 不等式**:

$$|E(\xi\eta)| \leqslant E(|\xi\eta|) \leqslant [E(|\xi|^2)]^{1/2}[E(|\eta|^2)]^{1/2}.$$

仅当存在实数 α,使得 $P\{\alpha\xi + \eta = 0\} = 1$ 时等号成立.

证 利用第 3 章 N.27. Young 不等式:

$$|ab| \leqslant \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q.$$

令 $a = \xi[E(|\xi|^p)]^{-1/p}, b = \eta[E(|\eta|^q)]^{-1/q}$,

并在不等式两边同时求数学期望,得到 $E(|ab|) \leqslant (1/p) + (1/q) = 1$.

注 Cauchy 不等式还具有以下形式:

(1) $E(\xi\eta) \leqslant [E(\xi^2)]^{1/2}[E(\eta^2)]^{1/2}$.

(2) $\mathrm{cov}(\xi\eta) \leqslant [D(\xi)]^{1/2}[D(\eta)]^{1/2}$.

在实际应用中,Hölder 不等式还可写成以下形式:

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,$(X,\sum,\mu)$为σ有限测度空间,f为$X\times\Omega$上非负乘积可测函数,则

$$\int_X \exp\left[\int_\Omega \log f(x,\omega)P(\mathrm{d}\omega)\right]\mu(\mathrm{d}x)\leqslant \exp\left\{\int_\Omega \log\left[\int_X f(x,\omega)\mu(dx)\right]P(d\omega)\right\}.$$

1987 年,Duoandikoetxea,J. 证明了**反向 Hölder 不等式**:

设$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$是随机变量,其中$\xi_j$是独立的,并且有分布函数$\exp(-\pi|x|^2)$,若$P(\xi)$是变量$\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$的$k$阶多项式,则

$$E(|P|^q)^{1/q}\leqslant q^{k/2}E(|P|^2)^{1/2},2<q<\infty,$$

$$E(|P|^2)^{1/2}\leqslant 4^\alpha E(|P|^q)^{1/q},0<q<2,\alpha=k((2/q)-1).$$

见[308]1987,101(3):487 - 491.

2. **Minkowski 不等式**:设$p\geqslant 1,E|\xi|^p<\infty.E|\eta|^p<\infty$,则

$$(E|\xi+\eta|^p)^{1/p}\leqslant(E|\xi|^p)^{1/p}+(E|\eta|^p)^{1/p}. \tag{1.1}$$

若$0<p<1$,则

$$E|\xi+\eta|^p\leqslant E|\xi|^p+|\eta|^p. \tag{1.2}$$

证 若$p=1$,则从$|\xi+\eta|\leqslant|\xi|+|\eta|$可立即推得(1.1)式:若$p>1$且$E|\xi+\eta|^p=0$,则(1.1)式显然成立;若$p>1,E|\xi+\eta|^p\neq 0$,则从

$$|\xi+\eta|^p\leqslant|\xi|\cdot|\xi+\eta|^{p-1}+|\eta|\cdot|\xi+\eta|^{p-1}.$$

有

$$E|\xi+\eta|^p\leqslant E(|\xi|\cdot|\xi+\eta|^{p-1})+E(|\eta|\cdot|\xi+\eta|^{p-1}).$$

右边利用 Hölder 不等式即可推得(1.1)式.

当$0<p<1$时,从$|\xi+\eta|^p\leqslant|\xi|^p+|\eta|^p$即可推得(1.2)式.

3. **C_p 不等式**:$E(|\xi+\eta|^p)\leqslant C_p(E|\xi|^p+E|\eta|^p)$,式中

$$C_p=\begin{cases}2^{p-1}, p\geqslant 1,\\ 1,\quad 0<p\leqslant 1.\end{cases}$$

推广 $E\left(\left|\sum_{k=1}^n\xi_k\right|^p\right)\leqslant C_p\sum_{k=1}^n E(|\xi_k|^p)$,式中

$$C_p=\begin{cases}n^{p-1}, p\geqslant 1,\\ 1,\quad 0<p\leqslant 1.\end{cases}$$

4. **Jensen 不等式**:设随机变量ξ取值于区间(a,b),$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$,$g$是区间$(a,b)$上连续的凸函数.则当$E\xi,Eg(\xi)$存在时,有

$$g(E\xi)\leqslant Eg(\xi).$$

证 任取$x_0\in(a,b)$,设曲线$y=g(x)$在点x_0的切线斜率为$k(x_0)$,由曲线的凸性,有$g(x)\geqslant g(x_0)+k(x_0)(x-x_0)$.取$x_0=E\xi,x=\xi$,得

$$g(\xi)\geqslant g(E\xi)+k(E\xi)(\xi-E\xi).$$

再由数学期望的单调性及非负性即可得证.

5. **Lyapunov 不等式**:设$0<p\leqslant q$,则

$$[E(|\xi|^p)]^{1/p} \leqslant [E(|\xi|^q)]^{1/q},$$

仅当 ξ 为退化的或 $p \geqslant 0$ 且 $E(\xi^p) = \infty$ 或 $q \leqslant 0$ 且 $E(\xi^q) = \infty$ 时等号成立.

证 令 $t = q/p, g(x) = |x|^t$,利用上述 Jensen 不等式即可得证,另见[6]$P455$.

推论 1 设 $p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant 0$,则

$$[E(|\xi|^{p_1})]^{p_2-p_3}[E(|\xi|^{p_2})]^{p_3-p_1}[E(|\xi|^{p_3})]^{p_1-p_2} \geqslant 1.$$

推论 2 设 $p \geqslant 1$,则成立 **Rao 不等式**.

$$[E(|\xi|^p)]^{2p} \leqslant [E(|\xi|^{p-1})]^p[E(|\xi|^{p+1})]^p.$$

(见 Linear statistical inferences. Wiley. 1973,P149)

6. **AG 平均不等式**:设 ξ 为非负的随机变量,则

$$E\xi \geqslant \exp E(\ln\xi).$$

仅当 ξ 为退化的,或 $E(\ln\xi) = \infty$ 时等号成立. 见[6]P. 454 - 455.

7. 设 ξ 为非负随机变量,则当 $r > 0$ 时,$(E\xi^r)^{1/r} \geqslant \exp E(\ln\xi)$,而当 $r < 0$ 时,不等号反向. 仅当 ξ 为退化的或 $r \geqslant 0$ 且 $E\xi^r = \infty$ 时等号成立. 见[6]P. 455.

8. 设 ξ 是具有有限一阶矩的正的随机变量,则

(1) $p \geqslant 1$ 时,$[E(\xi)]^p \leqslant E(\xi^p)$,$0 < p \leqslant 1$ 时不等号反向.

(2) $E(1/\xi) \leqslant 1/E\xi$.

9. **Kruskal 不等式**:设 ξ 是具有有限期望并且满足 $\xi \geqslant \alpha > 0$ 的非退化随机变量,则

$$E(\sqrt{\xi^2 - a^2}) \leqslant \sqrt{(E\xi)^2 - a^2}.$$

[143]. P201.

10. **优化向量不等式**:设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为随机变量,且联合分布关于它的分量的排列是不变的. 若向量 $b = (b_1, \cdots, b_n)$ 被向量 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 所优化,即 a, b 的各个分量可重新排列,使其 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$,

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \geqslant \sum_{j=1}^{k} b_j, k = 1, \cdots, n-1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j.\text{(见第 7 章 §1 定义 6)}.$$

又若 f 是凸的对称函数,则

$$Ef(a_1\xi_1, \cdots, a_n\xi_n) \geqslant Ef(b_1\xi_1, \cdots, b_n\xi_n).$$

(Marshall;A. W. 等,[301]1965,12:87 - 90)

11. [MCU]. 设 ξ, η 为随机变量,$E(\xi) = E(\eta) = 0, D(\xi) = D(\eta) = 1, \mathrm{cov}(\xi, \eta) = r$,则 $E(max\{\xi^2, \eta^2\}) \leqslant 1 + \sqrt{1 - r^2}$.

12. **Gurland 不等式**:

(1) 设 f, g 是两个同向单调函数(即同时递增或同时递减),且至少有一个连续,则

$$E(f(\xi)g(\xi)) \geqslant E(f(\xi))E(g(\xi)),$$

若 f, g 异向单调(即其一递增,另一递减),则不等号反向. 特别当 ξ 为非负随机变量时,成立

$$E(\xi^{p-1}) \leqslant E(\xi^{p})E(\xi^{-1}), (p > 0).$$

(Amer. Statist. 1967, 21(2): 24 - 25)

(2) 设 $f_1, \cdots, f_n$ 为非负单调连续函数，且都递增或都递减，则

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} f_k(x)\right) \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} E(f_k(x)\right).$$

特别，当 ξ 为非负随机变量，$p \geqslant 1$ 或 $p \leqslant 0$ 时，成立

$$E(\xi^{p}) \geqslant [E(\xi)]^{p} \geqslant [E(\xi^{-1})]^{-p} \geqslant [E(\xi^{-p})]^{-1}.$$

(见 Amer. Statist. 1968, 22(2): 26 - 27)

13. 设 ξ 为正的随机变量，则

(1) 若 $p > 0, q \geqslant 0$，则 $E(\xi^{p+q-1})E(\xi^{p}) \leqslant E(\xi^{p+q})E(\xi^{p-1})$;

(2) 若 $p \geqslant 0$，则

$$\frac{1}{[E(\xi)]^{p}} \leqslant \frac{E(\xi^{-1})}{[E(\xi)]^{p-1}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{E(\xi^{-(p-1)})}{E(\xi)} \leqslant E(\xi^{-p}).$$

(Sclove 等. 1967)

14. 设 ξ 为非负随机变量，则

(1) $p \geqslant q \geqslant 1$ 时，$E(\xi^{p}) \geqslant [E(\xi^{p/q})]^{q} \geqslant [E(\xi)]^{p} + [E(\xi^{p/q}) - (E\xi)^{p/q}]^{q}$,

(2) $p \geqslant 2$ 时，$E(\xi^{p}) \geqslant [E(\xi)]^{p} + [D(\xi)]^{p/2}$,

(Tong, Y. L., J. Amer. Statist, Asso. 1970, 65: 1243 - 1247)

15. 对任意实数 a，$D(\xi) \leqslant E[(\xi - a)^2]$，仅当 $a = E(\xi)$ 时等号成立.

16. 设 ξ 是离散型随机变量，$P(\xi = x_k) = p_k, 1 \leqslant k \leqslant n$. 令 $a = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$, $M = \max_k\{x_k\}, m = \min_k\{x_k\}$，则

(1) $D(\xi) \leqslant (M - a)(a - m) \leqslant \frac{1}{4}(M - m)^2$.

(Moors 等. Sankhya B, 1971, 33: 385 - 388.);

(2) 设 g 是 C^* 代数 A 到 C^* 代数 B 的正单位线性映射，a 为 A 中自伴元，$m \leqslant a \leqslant M$，则

$$g(a^2) - [g(a)]^2 \leqslant [M - g(a)][g(a) - m] \leqslant \frac{1}{4}(M - m)^2;$$

$$g(a^{-1}) \leqslant \frac{(M + m)^2 [g(a)]^{-1}}{4Mm}, a > 0.$$

([305] 2000, 107(4): 353 - 357.)

17. [MCU]. 对于取值 $[a, b]$ 的二阶矩存在的随机变量 ξ，恒有

(1) $a \leqslant E(\xi) \leqslant b$;

(2) $E(\xi) \leqslant (b - a)^2/4$.

18. 设 ξ 是存在有限二阶矩的随机变量，α 是有限实数，$\eta = \min\{\xi, \alpha\}$，则

$$E(\eta - E\eta)^2 \leqslant E(\xi - E\xi)^2.$$

19. 设 ξ 是有二项分布的随机变量，它的参数为 (n, p)，则 $\forall k: 1 \leqslant k \leqslant n$. 成立

$$E\{\min\{\xi,k\}\} \geqslant k[1-(1-p/k)^n].$$

问题:对于 $E\{\min\{\xi,k\}\}$,有比 $\min\{np,k\}$ 更好的上界吗?见[305]1991,98E3332.

20.　**钟开莱不等式**:设 ξ_k 为非负随机变量,则

(1)　$p>1$ 时,

$$E\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|^p\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p;\quad \left\{E\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|^p\right)\right\}^{1/p}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[E(|\xi_k|^p)]^{1/p}.$$

(2)　若 $p\geqslant1$,则 $E[(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)^p]\geqslant\sum_{k=1}^{n}E(\xi^p)$.当 $p\leqslant1$ 时,不等号反向.([30]P.314)

21.　设 $\xi_1\cdots,\xi_n$ 为独立随机变量,且中位数皆为零,则

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right|\right)\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}\binom{n-1}{[\frac{n}{2}]}E\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|\right).$$

(Tukey,J.W.,Ann. Math. Statist. 1946,17:75－78)

22.　设 $\xi_1\cdots,\xi_n$ 为独立同分布随机变量,$E(\xi)=0$.若 $\exists\, m\in N.E(\xi^{2m})<\infty$,实数 $\{a_k\}$ 满足 $\sum_{k=1}^{n}a_k^2=1$.则

(1)　$E\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k\right)^2\leqslant E(\xi^2)$.

(2)　$m\geqslant2$ 时,$E\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k\right)^{2m}<\left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}(2m-1)!!E(\xi^{2m})$.

(陶波,成平,[336]1981,2(4):451－461.)

23.　[MCU].设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是二阶矩有限的随机变量,令 $S_k=\sum_{j=1}^{k}\xi_j,1\leqslant k\leqslant n$,则

(1)　$S_k^2\leqslant k\sum_{j=1}^{k}\xi_j^2$;　(2)$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}S_k^2)\leqslant n\sum_{k=1}^{n}E(\xi_k^2)$.

24.　**Whittle 不等式**:设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 是独立同分布的随机变量,且 $P(\xi_k=\pm1)=1/2$,$1\leqslant k\leqslant n$.则对于任意实数 $b_k,1\leqslant k\leqslant n,p\geqslant2$,有

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\xi_k\right|^p\right)\leqslant K(p,n)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{p/2}. \tag{1.3}$$

式中 $K(p,n)=2^{-n}n^{-p/2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|^p$.仅当 $p=2$ 或所有 b_k 的绝对值相等时等号成立.见[352]1989,16(3):350－351.

25.　**Moran 不等式**:在 N.24 的条件下,Moran 猜测,对任何实数 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant0,n\geqslant1$,有

$$E\left(\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k\right|\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{1/2}, \tag{1.4}$$

仅当 $a_1=a_2,a_3=\cdots=a_n=0$ 时(1.4)式中等号成立.1984 年刘坤会证明了上述猜测.见[364]1984,3:193－209.

问题:(1.3)式左边的下界是什么?

26. 1987 年邵启满证明了取值于 Banach 空间的 φ- 混合序列的矩不等式. 作为推论,对独立情形得到了比 Marcinkeiwicz-Zygmund 不等式更为实用的矩不等式,即

(1) 设$\{\xi_n\}$是实值随机变量的 φ- 混合序列. 令 $S_k(n)=\sum_{j=k+1}^{k+n}\xi_j$. 若存在正的数列$\{C_{k,n}\}$,使得对于每个 $k\geqslant 0, n\geqslant 1, m\leqslant n$,都有 $ES_k^2(m)\leqslant C_{k,n}$,则对每个 $q\geqslant 2$,存在仅依赖于 $\varphi(\cdot)$ 和 q 的常数K,使得

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|S_k(j)|^q)\leqslant K(C_{k,n}^{q/2}+E(\max_{k\leqslant j\leqslant k+n}|\xi_j|^q)).$$

(2) 设 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为独立随机变量序列,若 $E\xi_k^2<\infty, E\xi_k=0, 1\leqslant k\leqslant n$,则对每个 $q\geqslant 2$,有

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|^q)\leqslant(96q)^q\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}E\xi_k^2\Big)^{q/2}+E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k|^q)\Big],$$

式中 $S_k=\sum_{j=1}^{k}\xi_j$,式中的阶不能再改进. 作者还进一步猜测,这个不等式对于鞅差序列也同样成立. 但未能证明.

(3) 设 ξ,η 为任意两个实值随机变量,若存在正数 A,a,c_1,c_2 及 $0<b<1$,使得对于所有 $x\geqslant A$,都有 $P(|\eta|\geqslant x)\leqslant c_1P(|\xi|\geqslant ax)+c_2P(|\eta|\geqslant bx)$,则对每个 $q>0$,当 $0<c_2<b^q$ 时,有

$$E|\eta|^q\leqslant\frac{A^q+c_1a^{-q}E|\xi|^q}{(1-c_2b^{-q})}.$$

见[334]1988,31(6):736－747,[339]1989,9(1):24.

27. **Prophet 不等式**:设$\{\xi_k\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$,并在区间$[0,1]$中取值的独立随机变量列,T 是所有有限的几乎必然的停止时间的集. 1987 年 Hill, T. 等证明

$$E(\sup_{n\geqslant 1}\xi_n)-\sup_{t\in T}E\xi_t\leqslant 1/4.$$

当 $n\geqslant 2$ 时,上界是最好的. 见[308]1987,83:582－585.

1990 年, Jones, M. 证明

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(\xi_j-jc))-\sup_{t\in T_n}E(\xi_t-tc)\leqslant[1/c]c(1-c)^{[1/c]}, c>0;$$

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(\xi_j-jc))-\sup_{t\in T_n}E(\xi_t-tc)\leqslant\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\quad(c\geqslant 0);$$

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(\xi_j-jc))-\sup_{t\in T_n}E(\xi_t-tc)\leqslant 1/e\quad(c\geqslant 0).$$

上述三个上界都是最好的. 见 J. Mult. Anal. 1990, 34(2):238－253.

28. 设 ξ,η 是相互独立的随机变量,则

(1) $D(\xi\eta)\geqslant D(\xi)D(\eta)$.

(2) $E\Big[\Big(\frac{\xi}{\eta}\Big)^k\Big]\geqslant\frac{E(\xi^k)}{E(\eta^k)}, k\in N$.

(3) 若 $E(\xi)=E(\eta)=0$, $E(\eta^{-1})$ 存在,则

$$D\Big(\frac{\xi}{\eta}\Big)\geqslant\frac{D(\xi)}{D(\eta)}.$$

(2)(3) 见 Mullen, K., Amer. Statist. 1967, 2(3): 30 - 31.

29. [MCU]. 设 ξ,η 是正的随机变量，其联合密度函数 $f(x,y)$ 关于每个变量 x,y 递减，$E(\xi),E(\eta)<\infty$，则

(1) $E(\xi)+E(\eta)\leqslant 3E(|\xi-\eta|)$;

(2) 若 $0<\xi,\eta<1$，则 $4E(\xi\eta)\leqslant 3E(|\xi-\eta|)$.

提示：设 $\varphi_{\{\xi\geqslant\eta\}}=\begin{cases}1,\xi\geqslant\eta\\0,\xi<\eta\end{cases}$ 是 $\{\xi\geqslant\eta\}$ 的特征函数. 则

$$3E(|\xi-\eta|)-E(\xi)-E(\eta)=2E\{[(\xi-2\eta)\varphi_{\{\xi\geqslant\eta\}}]+[\eta-2\xi\varphi_{\{\eta>\xi\}}]\}.$$

$$E[(\xi-2\eta)\varphi_{\{\xi\geqslant\eta\}}]=\int_0^\infty\int_0^x(x-2y)f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^\infty\int_0^{\frac{x}{2}}(x-2y)f(x,\frac{x}{2})\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_0^\infty\int_{x/2}^x(x-2y)f(x,\frac{x}{2})\mathrm{d}y\mathrm{d}x=0.$$

同理，$E[(\eta-2\xi)\varphi_{\{\eta>\xi\}}]\geqslant 0$. 从而(1) 得证. (2) 的证明类似.

30. 若 ξ,η 是独立同分布的随机变量，$E(\xi)=0$，则当 $1\leqslant p\leqslant 2$ 时，成立

$$(1/2)E(|\xi-\eta|^p)\leqslant E(|\xi|^p)\leqslant E(|\xi-\eta|^p);$$

31. Bennet 不等式：设 $E(\xi)=0$，$|\xi|\leqslant M$，$p\geqslant 2$，则

$$E(\xi^p)\leqslant E(|\xi|^p)\leqslant M^{p-2}D\xi.$$

当 $k=3,5,7,\cdots$(奇数) 时，

$$E|\xi^k|\leqslant M^{k-2}D\xi\left[\frac{1-\left(\frac{\sqrt{D\xi}}{M}\right)^{2(k-1)}}{1+\left(\frac{\sqrt{D\xi}}{M}\right)^2}\right]\leqslant M^{k-2}D\xi.$$

(Biometrka, 1965, 52: 559 - 569.)

32. 设 ξ 是随机变量，其密度函数 $f\in AC[a,b]$，$f'\in L^\infty[a,b]$，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则

(1) $$\left|E(\xi)+\left(\frac{b-a}{2}\right)F(x)-\frac{x+b}{2}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{4}(b-a)\|f'\|_\infty\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{12}(b-a)^2\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{12}(b-a)^3\|f'\|_\infty.\ \forall x\in[a,b].$$

(Barnett, N. S. 等, [330] 2001, 32(1): 55 - 60)

(2) $$\left|E(\xi)-\frac{a+b}{2}-\frac{(b-a)^2}{12}[f(b)-f(a)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(b-a)^3}{24}\left\|f'-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\|_\infty;\tag{1.5}$$

若 $f'\in L^p[a,b]$，$p>1$，$1/p+1/q=1$，则(1.5) 式右端改为

$$\frac{(b-a)^{2+1/q}}{8(2q+1)^{1/q}}\left\|f'-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\|_p;$$

若 $f' \in L[a,b]$,则(1.5)式右端改为

$$\frac{(b-a)^2}{8}\left\| f' - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right\|_1.$$

(Barnett 等.[330]2002,33(2):127 - 128)

33. **Keilson 不等式:**

(1) 设 $f(x)$ 为对数凹函数,则

$$\left(\frac{E(\xi^{k+1})}{(k+1)!}\right)^{\frac{1}{k+1}} \leqslant \left(\frac{E(\xi^k)}{k!}\right)^{1/k};$$

(2) 离散分布情形,即 f 是定义在非负整数集上的对数凹函数,即满足 $f^2(k) \geqslant f(k-1)f(k+1)$,则

$$\left(\frac{E(\xi(\xi-1)\cdots(\xi-k))}{(k+1)!}\right)^{\frac{1}{k+1}} \leqslant \left(\frac{E(\xi(\xi-1)\cdots(\xi-k+1))}{k!}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

(Ann. Math. Statist. 1972,43:1702 - 1708)

34. 设 $(B, \|\cdot\|)$ 是实可分的 Banach 空间. $\xi_1,\cdots\xi_n$ 是独立的 B 值随机元, $E(\|\xi_k\|^p) < \infty, 1 \leqslant k \leqslant n$.

(1) 若 $1 < p \leqslant 2$,则

$$E\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k\right\| - E\left(\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k\right\|\right)\right|\right)^p \leqslant c(p)\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k\|^p);$$

(2) 若 $p > 2$,则

$$E\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k\right\| - E\left(\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k\right\|\right)\right|\right)^p \leqslant c_p\left[\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k\|^p) + \left(\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k\|^2)\right)^{p/2}\right].$$

设 $x_k, y_k \in B, p \geqslant 2$,则(2)可改进为

$$E\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k\right\| - E\left(\left\|\sum_{k=1}^n \xi_k\right\|\right)\right|\right)^p$$
$$\leqslant c_p\left[\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k - x_k\|^p) + \left(\sum_{k=1}^n E(\|\xi_k - y_k\|^2)\right)^{p/2}\right].$$

1992 年,刘立新利用优化方法作了进一步推广:设 $(X, \sum, \|\cdot\|)$ 是半范可测向量空间, ξ_k 为 X 值独立随机元列, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $\forall x_k \in X$,记 $A_n = \sum_{k=1}^n E(\|\xi_k - x_k\|)$, $B_n = \sum_{k=1}^n E(\|\xi_k - x_k\|^2)$. g 是 R^1 上非负凸的偶函数, $g(0) = 0, Eg(\|\xi_k\|) < \infty$, $1 \leqslant k \leqslant n$. $0 < A_n, B_n < \infty$,则 $\forall r > 0$,成立

$$Eg(\|S_n\| - E(\|S_n\|)) \leqslant \sum_{k=1}^n Eg(4r\|\xi_k - x_k\|) + 2e^r\int_0^\infty (1 + \frac{x}{4A_n})^{-r}\mathrm{d}g(x);$$

$$Eg(\|S_n\| - E(\|S_n\|)) \leqslant \sum_{k=1}^n Eg(4r\|\xi_k - x_k\|) + 2e^r\int_0^\infty (1 + \frac{x^2}{16rB_n})^{-r}\mathrm{d}g(x).$$

(见吉林大学学报 1993,1:1 - 6.)

35. $\mathrm{cov}(\xi, \eta) \leqslant D(\frac{\xi + \eta}{2})$.

特别,当 ξ,η 为正的随机变量时,若 $0\leqslant p\leqslant 1$,则

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)\leqslant D[\frac{1}{2}(\xi^p+\eta^p)]^{1/p};\quad \operatorname{cov}(\xi,\frac{\eta}{\xi})\leqslant D(\xi^{1/2}).$$

(Kimeldorf, G. 等, J. Amer. statist. Asso. 1973, 68: 228 - 230.)

36. **方差平均不等式**:2003 年文家金等引入方差平均 $D_r(x,p)$. 设 $P\{\xi=x_k\}=p_k, 1\leqslant k\leqslant n$.

$$E(\xi)=A(x,p)=\frac{1}{\sum_k p_k}\sum_k p_k x_k,$$

$$E(\xi^r)=A(x^r,p),\quad D_r(\xi)=A(x^r,p)-[A(x,h)]^r,$$

$$D_r(x,p)=\left[\frac{2}{r(r-1)}\frac{D_r(\xi)}{D(\xi)}\right]^{1/(r-2)},\quad r\geqslant 2.$$

(1) 若 $r\in N, r>3$,则 $D_r(x,p)\geqslant D_3(x,p)$;且

$$D_r(x,p)\geqslant\left(\frac{2}{r}\right)^{1/(r-2)}A(x,p),$$

式中 $(2/r)^{1/(r-2)}$ 是最佳常数.

(2) 猜想实数 $r\geqslant 2$ 时,$D_r(x,p)$ 关于 r 递增. 见[351]2003, 2: 19 - 32.

§2 概率分布函数不等式

1. **Chebyshev 不等式**:设 $t>0$,则

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\}\leqslant(\sigma/t)^2 \quad 或 \quad P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\cdot\sigma\}\leqslant 1/t^2. \tag{2.1}$$

注 1 对于 $E\xi^2<\infty$,(2.1) 式不能再改进. 但若高阶矩存在,则在某些情形下,(2.1) 式仍可改进. 例如,我们有:设 $E|\xi|^4<\infty, E\xi=0, \sigma=\sqrt{D\xi}$,则对于 $t>1$,有

$$P\{|\xi|\geqslant t\sigma\}\leqslant\frac{E\xi^4-\sigma^4}{E\xi^4+(t\sigma)^4-2t^2\sigma^4}, \tag{2.2}$$

若 $t^2\geqslant\frac{E(\xi^4)}{\sigma^4}$,则(2.2) 式比(2.1) 式好;但当 $1\leqslant t^2<\frac{E(\xi^4)}{\sigma^4}$ 时,则(2.2) 式比(2.1) 式差;若 $0<t\leqslant 1$,则 $P\{|\xi-E\xi|\geqslant t\sigma\}\leqslant 1$.

注 2 (2.1) 式是由 Bienayme(1853) 与 Chebyshev(1866) 独立发现的,但在近代文献中,(2.1) 式及其各种变形和推广都称为 Chebyshev(型) 不等式,将其应用于随机变量之和,在各种形式的大数律及重对数律的证明中起着重要作用.

注 3 (2.1) 式可推广为

$$P\{|\xi-E\xi|\geqslant 2\sigma\}+P\{|\xi-E\xi|\geqslant 3\sigma\}\leqslant 1/4. \tag{2.3}$$

([305]2000, 107(3): 282.)

2. **单边 Chebyshev 不等式(Cantelli 不等式)**:设 $D\xi=\sigma^2<\infty$,则当 $t<0$ 时,

$$P\{\xi-E\xi\leqslant t\}\leqslant\frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2};$$

当 $t\geqslant 0$ 时,