§3 凸体与等周不等式

一、 凸体不等式

1. **B-M 不等式(Brunn-Minkowski 不等式)**:设 A,B 是 R^n 中非空有界凸集,$\mu(A)$ 为 A 的 Lebesgue 测度,则对于 $0<t<1$,成立

$$[\mu(tA+(1-t)B)]^{1/n}\geqslant t[\mu(A)]^{1/n}+(1-t)[\mu(B)]^{1/n}. \tag{3.1}$$

令 $A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$,则当 A,B 为 R^n 中非空紧集时,成立

$$[\mu(A+B)]^{1/n}\geqslant[\mu(A)]^{1/n}+[\mu(B)]^{1/n}. \tag{3.2}$$

特别,当 $B_0=B(0,1)$ 是坐标在原点的单位闭球:$B_t=B(0,t)$,则

$A+tB_0=A+B_t=\{x\in R^n:d(x,A)\leqslant t\}$,这时(3.2)可写成

$$[\mu(A+B_t)]^{1/n}\geqslant[\mu(A)]^{1/n}+t[V(B_0)]^{1/n}. \tag{3.3}$$

式中

$$V(B_0)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{m!}, & n=2m,\\[2mm] \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!}, & n=2m+1.\end{cases} \tag{3.4}$$

见[15]P.68 – 71.146 – 147.

2. **Bieberbach 不等式**:设 E_n 为 n 维赋范线性空间. $A\subset E_n$, $\mathrm{co}A$ 为 A 的凸包, V_n 为 E_n 中单位球的体积, $\mathrm{diam}A$ 为集 A 的直径,则

$$\mu(\mathrm{co}A)\leqslant\frac{V_n}{2^n}(\mathrm{diam}A)^n. \tag{3.5}$$

等号成立的充要条件及证明见[15]P93.

3. **Urysohn 不等式**:设 $A\subset R^n$, A 的具有法向量 $\pm v$ 的支撑超平面之间的距离称为 A 在方向 v 的宽度,记为 $h(v)$, $h(v)$ 的平均值定义为

$$h_m(A)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{S^{n-1}}h(v)\mathrm{d}\sigma(v).$$

式中 S^{n-1} 为 R^n 中单位球, ω_{n-1} 为其 $n-1$ 维面积, $\mathrm{d}\sigma$ 为相应的曲面元,则

$$\mu(\mathrm{co}A)\leqslant\frac{V_n}{2^n}[h_m(A)]^n.\quad(\text{见[15]P94}) \tag{3.6}$$

4. **Loomis-Whitney 不等式**:设 A 是 R^n 中非空紧集, $e_1,\cdots,e_n$ 是 R^n 中正交基, $1\leqslant m<n$. R_k^m 是 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 中 m 个向量所张成的子空间, $1\leqslant k\leqslant N$,其中 $N=\binom{n}{m}$,用 A_k 表示 A 在 R_k^m 上的投影,则

$$\mu(A)\leqslant\prod_{k=1}^{N}[\mu_m(A_k)]^{\frac{n}{Nm}}, \tag{3.7}$$

式中 μ_m 表示 R^m 中的 Lebesgue 测度. 见[15]P.95. 原文见[376]1949,55:961 – 962.

5. **全平均曲率不等式**:设 A 是 R^3 中非空凸紧集,$\mu(A)$ 为 A 的 (L) 测度,A 的边界曲面的面积和全平均曲率分别记为 S 和 ρ,则

$$\mu(A) \geqslant \frac{\pi S}{24\rho}\left(S - \frac{2\rho^2}{\pi^3}\right).$$

(Groemer, H. [354]1965, 86:361 - 364)

6. 设椭球的半轴为 a,b,c,表面积为 S,则

$$\left(\frac{4\pi}{3}\right)\sum ab \leqslant S \leqslant \left(\frac{4\pi}{3}\right)\sum a^2; \tag{3.8}$$

在体积相同的条件下,椭球的表面积 S 大于球的表面积,即除去 $a = b = c$,成立

$$S > 4\pi(abc)^{2/3}. \tag{3.9}$$

二、 圆与椭圆不等式

1. 设半径为 r_1,r_2,r_3 的三个圆互相外切,且它们内切于半径为 R 的圆,则

$$r_1 + r_2 + r_3 < 3R/2.$$

2. [MCM]. 三个圆两两外切,切点分别 A,B,C,将三个圆的半径都扩大 $2/\sqrt{3}$ 倍. 圆心不变,则 ΔABC 的每一点至少被一个扩大了的圆所覆盖.

3. [MCM]. 设 AB, CD 是以 O 为圆心,r 为半径的圆的两条互相垂直的弦,圆盘被它们分成的四部分面积依顺时针方向记为 S_1,S_2,S_3,S_4,则

$$\frac{\pi-2}{\pi+2} \leqslant \frac{S_1+S_3}{S_2+S_4} \leqslant \frac{\pi+2}{\pi-2}. \tag{3.10}$$

(30 届 IMO 备选题,见[348]1980.5:39)

4. 设 $L(a,b)$ 表示椭圆 $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ 的周长,$a \geqslant a_1 \geqslant b$,则 $L^2 - L_1^2 \geqslant 16(a^2 - a_1^2)$,式中 $L = L(a,b)$,$L_1 = L(a_1,b)$,见[305]1971,78:202.

5. 设 S_n 表示椭圆 $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ 的内接 n 边形的面积,则 $S_3 \leqslant (3\sqrt{3}/4)ab$; $S_4 \leqslant 2ab$, $S_n \leqslant (n/2)ab\sin(2\pi/n)$;若 $a > b > 0$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,则 $(x-c)^2 + y^2 \leqslant 4a^2$.

提示:对椭圆作压缩变换 $x_1 = x$, $y_1 = (a/b)y$,得到它的辅助圆 $x_1^2 + y_1^2 = a^2$.

6. 设圆面积为 S,周长为 L,它的内接和外切正 n 边形的面积分别为 S_1,S_2,周长分别为 L_1,L_2,则

(1) $S_1S_2 < S^2$; (3.11)

(2) $L_1L_2 < L^2$. (3.12)

(莫斯科国立大学 1991 年入学考试试题,见[383]1993,40(2):138 - 139)

7. **刘徽割圆不等式**(公元 263 年):设 S_n 为单位圆内接正 n 边形的面积,则

$$S_{2n} < \pi < 2S_{2n} - S_n. \tag{3.13}$$

1985 年,俞文魮等利用数值分析中的外推公式:

$$S_n^k = \frac{4^k S_{2n}^{k-1} - S_n^{k-1}}{4^k - 1}; \quad T_n^k = \frac{2^{2k-1} S_{2n}^{k-1} - S_n^{k-1}}{2^{2k-1} - 1} \tag{3.14}$$

证明了一组新的割圆不等式：

(1) $S_n^k < \pi < T_n^k$, $(n \geqslant 3, k \geqslant 1)$; (3.15)

(2) $S_n^k < S_{2n}^k < S_n^{k+1}$; (3.16)

(3) $T_n^{k+1} < T_{2n}^k < T_n^k$. (3.17)

从(3.16)(3.17)关于足标的单调性，为使 S_n^k 或 T_n^k 与 π 更加接近，外推一次的效果要优于边长加倍一次的效果. 见曲阜师大学报 1985,1:41 - 45.

8. **R^n 中单位球体积 V 的不等式：** 已知 R^n 中以 r 为半径的球 $B(0,r) = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2} \leqslant r\}$ 的体积为

$$V_n(B) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^n = \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{m!} r^{2m}, & n = 2m, \\ \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m+1)!!} r^{2m+1}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

相应球面 $S(0,r) = \{x = (x_1, \cdots x_n) : (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2} = r\}$ 的面积为

$$S_n(B) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{2\pi^m}{(m-1)!} r^{2m-1}, & n = 2m, \\ \dfrac{2(2\pi)^m}{(2m-1)!!} r^{2m}, & n = 2m+1, \end{cases}$$

式中 $\Gamma(n)$ 为 Gamma 函数.(见第 8 章 §3)

当 $r = 1$ 时，即单位球的体积记为 V_n，表面积记为 S_n. Alzer, H. 利用 Γ 及其对数导数 Γ'/Γ 的性质证明了下述不等式：

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} V_{n+1}^m \leqslant V_n \leqslant V_{n+1}^m$，式中 $m = \dfrac{n}{n+1}$; (3.18)

(2) $\left(\dfrac{n+(1/2)}{2\pi}\right)^{1/2} \leqslant \dfrac{V_{n-1}}{V_n} \leqslant \left(\dfrac{n+(\pi/2)-1}{2\pi}\right)^{1/2}$; (3.19)

(3) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha \leqslant \dfrac{V_n^2}{V_{n-1}V_{n+1}} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\beta$. (3.20)

式中 $\alpha = 2 - \dfrac{\ln\pi}{\ln 2}, \beta = \dfrac{1}{2}$.

以上常数均是最优的. 应注意的是 V_n 不单调，在 $n = 5$ 时达到最大值. 但 $V_n^{1/n}$ 却是严格递减且 $V_n^{1/n} \to 0 (n \to \infty)$. 见[301]2000,252(1):353 - 363.

9. **费叶思 - 托特问题：** 球面上 n 个点，每两点之间的球面距离(以这两点为端点的大圆上的最短弧的长)的总和记为 d_n. 问这 n 个点处于什么位置时，d_n 最大？卡扎里诺夫在[53]P.125 - 127 给出了 d_n 的上、下界估计：

$$\pi n^2/4 \leqslant d_n \leqslant \pi n(n-1)/3. \tag{3.21}$$

但刘西垣在[53]P.127 上指出，(3.21)的下界与 $d_{2k+1} = \pi k(k+1)$ 的猜测矛盾，因此(3.21)的左端对大于 3 的奇数可能不成立. 我们问：如何解决这个矛盾？如何找出 d_n 的最优上、下界？

10. [MCU].设 C 是坐标平面上某个固定的单位圆,对于每边都同 C 相切的任一凸多边形 P,以 $N(P,x,y)$ 表示中心在 (x,y) 的单位圆周与 P 的公共点数.令 $D=\{(x,y):N(P,x,y)\geqslant 1\}$,则

$$\iint_D N(P,x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<(8/3)\,|D|. \tag{3.22}$$

式中 $|D|$ 是 D 的面积,系数8/3是最佳的.(42届普特南竞赛,见[305]1982,89:79-686)

注　这个积分不等式并不需要计算二重积分,而只用到初等的 Cavalieri 面积割补方法即可得证.

三、　等周不等式

(一)　经典等周不等式

1882 年 Edler,F 证明了平面区域 D 的面积 S 和其周长 L 之间满足不等式:

$$L^2\geqslant 4\pi S, \tag{3.23}$$

仅当该区域 D 为圆时等号成立,这就是等周不等式.推广到高维就是 $R^n(n\geqslant 2)$ 中某一区域 D 的体积 V 与构成该区域边界的 $n-1$ 维超曲面面积 S 之间满足

$$S^n\geqslant n^n v_n V^{n-1}, \tag{3.24}$$

式中 v_n 表示 n 维单位球的体积,仅当该区域 D 为球体时等号成立,其中 $n=3$ 时由 Schwarz 于 1890 年证明.而对 $n\geqslant 2$ 的一般形式则分别由 Люстерник(1935) 和 Schmidt(1939) 给出.

已知 $n=2$ 时,即(3.23)式有多种证法,下面用数学分析的方法更确切地叙述并证明(3.23)式:

设 $p(t)$ 以 2π 为周期且有二阶连续导数,带参量 t 的直线族为

$$F(x,y,t)=x\cos t+y\sin t-p(t)=0. \tag{3.25}$$

(p 表示原点到直线族中具有法向方向 t 的那条直线的距离),这些直线的包络 C 是一条闭曲线,且满足(3.25)和

$$F'_t(x,y,t)=-x\sin t+y\cos t-p'(t)=0.$$

于是曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)=p(t)\cos t-p'(t)\sin t\\ y=y(t)=p(t)\sin t+p'(t)\cos t\end{cases} \tag{3.26}$$

C 的长度 L 和面积 S 满足等周不等式(3.23),式中等号仅当 C 为圆周时成立.它表示在给定长度的全部曲线中,圆周包围的面积最大.

证 1　用 Fourier 级数方法. 作 $p(t)$ 的 Fourier 级数展开式,

$$p(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),\text{于是}$$

$$p'(t)=\sum_{k=1}^{\infty}k(b_k\cos kt-a_k\sin kt).\text{从而}$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,\mathrm{d}t=\pi a_0.$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy'_t-yx'_t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\left[\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}(k^2-1)(a_k^2+b_k^2)\right].$$

所以 $S\leqslant(\pi/4)a_0^2=L^2/4\pi$. 仅当 $\forall k\geqslant 2, a_k=b_k=0$ 时,才成立 $S=L^2/(4\pi)$,即 $p(t)=a_0/2+a_1\cos t+b_1\sin t$,它定义一个圆.

证 2 用变分法:设光滑曲线 C 的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta).\tag{3.27}$$

C 的长度为 $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\mathrm{d}t$. (3.28)

曲线 C 所围的面积为

$$S=S(x,y)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]\mathrm{d}t.\tag{3.29}$$

问题就变成在条件(3.28)下求泛函(3.29)的极值.

我们给出更一般的提法:在满足等周条件

$$\int_{x_1}^{x_2}G(x,y,y')\mathrm{d}x=a\quad(a\text{ 为常数})\tag{3.30}$$

和边界条件 $y(x_k)=y_k\quad(k=1,2)$ (3.31)

的一切曲线 $y=y(x)$ 中,确定一条曲线,使泛函

$$J(y)=\int_{x_1}^{x_2}g(x,y,y')\mathrm{d}x\tag{3.32}$$

达到极值,称为**广义等周问题**.

作辅助函数 $\varphi=g+\lambda G$ (λ 为待定常数),则归结为求泛函 $J^*(y)=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的无条件极值问题,于是得到广义等周问题的欧拉方程

$$(g'_y+\lambda G'_y)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g'_{y'}+\lambda G'_{y'})=0.\tag{3.33}$$

两个积分常数和待定常数 λ 可用等周条件(3.30)和边界条件(3.31)确定. 特别,取 $G(x,y,y')=\sqrt{1+(y')^2}$, $g(x,y,y')=y$,代入(3.33),即得

$$1-\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)=0.\tag{3.34}$$

它的积分曲线是圆族:

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2.\tag{3.35}$$

积分常数 c_1,c_2 和 λ 由(3.30)(3.31)决定.(3.35)表明,等周问题的解是通过 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 两点且长度为 a 的圆弧.

证 3 初等方法. 蔡宗熹在“等周问题”(人民教育出版社,1964)中,只用到中学平面几何知识,给出了两种初等证法,(包括著名的施坦纳证明),并介绍了一系列有趣的应用:从物理上“在表面张力作用下,液体有力求使其表面积达到最小趋势”解释吹出来的肥皂泡为什么总是圆球,到几何上解释:在具有给定表面积的所有立体中,球有最大的体积;在

具有给定体积的所有立体中,球有最小的表面积;在给定表面积的长方体中体积最大的和给定体积的长方体中表面积最小的都是立方体;周长一定的三角形中,等边三角形有最大面积;在周长一定的矩形中,正方形的面积最大,而面积一定的四边形中,正方形的周长最小等等.利用等周不等式还可证明 A-G 不等式.

[15]P.1 – 2 列出了等周不等式(3.23)的 10 种不同的证明方法.另见第 13 章 N,29,(17.2)式.当 $n\geqslant 3$时,经典等周不等式的证明方法,就目前所知还只有两种:第一种证法是 Steiner 提出的对称化方法(注),利用该方法,Schmildt 得到了经典等周不等式和 B-M 不等式(3.1)在球型和双曲型 n 维空间的类似不等式.(见 Math,Nachr,1948,1:81 – 157);第二种证法是将经典等周不等式转化为 B – M 不等式(3.1)并利用体积的比例除法,利用这一证法可得到 Minkowski 空间的经典不等式:

$$[S(A,B)]^n\geqslant n^n[V(A)]^{n-1}V(B). \tag{3.36}$$

式中 $V(A)$,$V(B)$分别为集合 A,B 的体积,$S(A,B)$是 A 相对于B 的 Minkowski 面积.(详见 Busemann,H.[310]1949,71:743 – 762)

注 Steiner 关于直线 l 的"对称化",是将平面域 P 变成另一平面域Q,满足:Q 关于 l 对称且与 l 垂直的任一直线,只要和 P,Q 之一相交,就必和另一个相交,且两条截线段具有相同的长度,Q 的截线段为l 所平分;在高维情形,则取 l 为超平面,Q 与P 为等积,而 Q 的周长(或表面积)并不比 P 的为大.1945 年 Polya-Szegö 发现通过对称化容量并不增加,利用这个性质,各种特征值的等周不等式以及特征值的估计问题都统一地得到了解决.

(二) 等周型不等式(经典等周不等式的推广)

1.**Bonnesen 不等式**(1921):设 C 为 Jordan 平面曲线,C 的周长为L,C 所围的面积为 S,内接于 C 的最大圆的半径为r,外切于 C 的最小圆的半径为R,并用 $\Delta=L^2-4\pi S$ 表示等周差,则

(1) $\Delta\geqslant(L-2\pi r)^2.$ (3.37)

(2) $\Delta\geqslant(2\pi R-L)^2.$ (3.38)

(3) $\Delta\geqslant\pi^2(R-r)^2.$ (3.39)

(4) $\Delta\geqslant\left(L-\dfrac{2S}{R}\right)^2.$ (3.40)

(5) $\Delta\geqslant S^2\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R}\right)^2.$ (6) $\Delta\geqslant L^2\left(\dfrac{R-r}{R+r}\right)^2.$

(7) $\dfrac{L-\sqrt{L^2-4\pi S}}{2\pi}\leqslant r\leqslant R\leqslant\dfrac{L+\sqrt{L^2-4\pi S}}{2\pi}.$ (3.41)

(8) 若 $r<t<R$,则 $\Delta>(L-2\pi t)^2$; $\Delta>\left(\dfrac{S}{t}-\pi t\right)^2$; $\Delta>\left(L-\dfrac{2S}{t}\right)^2$; $L-\dfrac{2S}{t}>\pi t-\dfrac{S}{t}.$

(9) 设曲线 C 位于半径为a 的球面上,则

$$L^2-4\pi S+\left(\frac{S}{a}\right)^2\geqslant 8\pi a^2\sin\frac{R-r}{4a(1+2\pi)}. \tag{3.42}$$

(10) 1942 年,Santalo,L. A. 证明:若曲线 C 位于具有负曲率 $-\frac{1}{a^2}$ 的曲面上,则

$$L^2-4\pi S-\left(\frac{S}{a}\right)^2\geqslant\frac{a^2}{4}\left(4\pi+\frac{S}{a^2}\right)^2\left(\operatorname{th}\frac{R}{2a}-\operatorname{th}\frac{r}{2a}\right)^2. \tag{3.43}$$

2. **解析等周不等式**:设 P_n 为平面 n 边形,它的面积记为 $S(P_n)$,周长为 $L(P_n)$,则

$$[L(P_n)]^2\leqslant 4n\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)S(P_n)+\left\{n\sin\frac{\pi}{n}-L(P_n)\right)^2,$$

若 P_n 的顶点均在单位圆周上,用 θ_k 表示第 k 边所对的圆心角,则上式变成:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\right)^2\geqslant n\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\cos\theta_k+\left(n\sin\frac{\pi}{n}-\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k\right)^2.$$

(Ku Hsu-Tung,[303]2000,3(4):459 - 472)

3. R^3 中凸体的边界称为卵形面,其表面积为 S. 内部的体积为 V,则

$$S^3\geqslant 36\pi V^2. \tag{3.44}$$

仅当卵形面为球面时等号成立.

4. 等周不等式还包括依赖于图形的形状和大小的几何量或物理量之间的不等式. 例如关于图形的边值问题的特征值之间的不等式关系,关于惯性矩,弹性梁的抗扭刚度,膜的基本频率,静电容量等物理量的估计以及集合,流形的几何特征之间的不等式等,因而等周不等式在数学物理、复变函数论、泛函分析、函数逼近论、变分法等都有广泛而深刻的应用. 例如:

(1) 设 p 是棱柱形弹性梁的抗扭刚度,S 是梁的横截面积,则

$$S^2\geqslant 2\pi p\quad(\text{Saint-Venant}) \tag{3.45}$$

(2) 设 S 是膜的面积,f 是膜的基本频率,α 是 Bessel 函数 $J_0(x)$ 的第一个正根,则

$$f^2\leqslant\frac{\pi\alpha^2}{S}(\text{Lord Rayleigh},1877) \tag{3.46}$$

(3) 设 C 是物体的静电电容量,V 为该物体的体积,则

$$3V\leqslant 4\pi C^3\quad(\text{Poincare},1903) \tag{3.47}$$

(4) 用关于面积、体积的等周不等式证明线性和拟线性椭圆型微分方程解的先验估计.

(5) 函数逼近论中的宽度(Width)是 Minkowski 空间中凸体的一种特殊的等周不等式.

(6) 泛函分析中,对 Sobolev 空间的嵌入算子的有界性和紧性条件可用等周不等式(联系测度和容量)给出,例如设 μ 为非负测度,$q\geqslant 2$,$n>2$,则

$$\left(\int_{R^n}|u|^q\mathrm{d}\mu\right)^{n/q}\leqslant C\int_{R^n}(\nabla u)^2\mathrm{d}x\quad\forall u\in C_0^\infty(R^n) \tag{3.48}$$

成立的充要条件是 $\forall$ 紧集 $A\subset R^n$,满足等周不等式;

$$[\mu(A)]^{2/q}\leqslant C_1\operatorname{cap}(A). \tag{3.49}$$

式中 $\operatorname{cap}(A)$ 是集 A 的 Wiener 容量. (见 Landkof, N. S., Foundations of modern potential theory, Springer-Verlag, 1972)

(7)　在共形与拟共形理论中应用等周不等式成了一种标准的方法,包含子流形平均曲率,特别是对极小曲面的等周不等式在 Plateau 问题的求解中起着重要作用. 所谓 Plateau 问题,就是求具有给定边界的极小曲面问题. 1760 年, Lagrange 对形如 $z = z(x, y)$ 的曲面类,把问题化为求极小曲面的 Euler-Lagrange 方程的解, Plateau 在 1849 年的实验表明,极小曲面可由伸展在金属丝框架上的肥皂膜的形状来得到,所以,后来就称为 Plateau 问题. 现已推广到 Riemann 空间中. 更详细的应用见[108].

5.　**混合体积不等式:** 设 K_j 为 R^n 的凸体,令 $K = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j K_j = \{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j : x_j \in K_j, \lambda_j > 0\}$. 则 K 的体积 $V(K)$ 定义为关于 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 的 n 次齐次多项式:

$$V(K) = \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_n=1}^{m} V(K_{j_1}, \cdots K_{j_n}) \lambda_{j_1} \cdots \lambda_{j_n}. \tag{3.50}$$

式中系数 $V(K_{j_1}, \cdots, K_{j_n})$ 关于下标的置换是对称的,并称为凸体 $K_{j_1}, \cdots, K_{j_n}$ 的混合体积 (mined volumes).

混合体积是一个十分广泛的概念,将 $V(K_1, \cdots, K_n)$ 中的 $K_2, \cdots, K_n$ 换成具体的凸体,就可以得到凸体 K_1 的种种性质,包括其体积、表面积,其主曲率的初等对称函数的曲面积分(在 C^2 光滑体的情形下),及其向 j 维平面($0 < j < n$) 的投影的相应特征. 例如,当 $n = 3$ 时,从(3.50) 得到 R^3 中平行凸体体积的 Steiner 公式:

$$V(\varepsilon) = V + S\varepsilon + \pi\rho\varepsilon^2 + \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3, \tag{3.51}$$

式中 $V(\varepsilon)$ 是 V 的 ε 邻域的体积, V 是平行凸体的体积, S 是其表面积, ρ 是原凸体的全平均曲率. n 个凸体 $K_1, \cdots, K_n$ 的混合体积可用积分表示:

$$V(K_1, \cdots, K_n) = \frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} K_1(u) \mathrm{d}\mu. \tag{3.52}$$

式中 $K_1(u)$ 是凸体 K_1 的支撑函数, $\mu(\omega) = \mu(K_2, \cdots, K_n, \omega)$ 是依赖于 $K_2, \cdots, K_n$ 的测度,称为 $K_2, \cdots, K_n$ 的混合曲面函数.

不同混合体积间的不等式构成了混合体积理论的主要内容,它们包括:

(1)　**Minkowski 不等式:**

$$[V(K, L, \cdots, L)]^n \geqslant V(K)[V(L)]^{n-1}; \tag{3.53}$$

(2)　**二次 Minkowski 不等式:**

$$[V(K, L, \cdots, L)]^2 \geqslant V(L) V(K, K, L, \cdots, L), \tag{3.54}$$

它可简记为

$$[V(K, 1; L, n-1)]^2 \geqslant V(L) V(K, 2; L, n-2).$$

(3)　**Aleksandrov-Fenchel 不等式(*AF* 不等式):**

$$[V(K_1, \cdots, K_m, L_1, \cdots L_{n-m})]^m \geqslant \prod_{j=1}^{m} V(K_j, \cdots, K_j, L_1, \cdots, L_{n-m}). \tag{3.55}$$

特别地,有

$$[V(K_1, \cdots, K_n)]^n \geqslant \prod_{j=1}^{n} V(K_j). \tag{3.56}$$

许多几何不等式,例如经典等周不等式及其改进和推广都是凸体混合体积不等式的特例,混合体积理论与代数几何学有着深刻的联系.以上不等式的证明见[15]第4章.P136-207.

(4) **Diskant 不等式**:设 A,B 为 R^n 中凸紧集.

$$q(A,B)=\sup\{\lambda:\exists x\in R^n,\lambda B+x\subset A\}$$

称为 B 在 A 中的容度系数(content coefficient),$Q(A,B)=\dfrac{1}{q(A,B)}$ 称为 B 在 A 中的围长系数(girth coefficient).当 B 为单位球时,$q=r,Q=R$,式中 r,R 分别是凸集 A 的内接最大圆半径和外切最小圆的半径,则

$$[V(A,n-1;B,1)]^{\frac{n}{n-1}}-V(A)[V(B)]^{\frac{1}{n-1}}\geqslant$$
$$\{[V(A,n-1;B,1)]^{\frac{1}{n-1}}-q[V(B)]^{\frac{1}{n-1}}\}^n;\tag{3.57}$$
$$[V(A,1;B,n-1)]^{\frac{n}{n-1}}-[V(A)]^{\frac{1}{n-1}}V(B)\geqslant$$
$$\left\{[V(A,1;B,n-1)]^{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{Q}[V(A)]^{\frac{1}{n-1}}\right\}^n;\tag{3.58}$$

我们在[15]中还可找到大量的等周不等式的种种改进和推广.

6. **Riemann 几何学中的等周不等式**:设 V^n 为 n 维 Riemann 空间.(n 维连通微分流形),D 是 V^n 中完全单连通区域,它的边界的 $n-1$ 维面积记为 S,则

$$V^{\frac{n-1}{n}}\leqslant c(n)S.\tag{3.59}$$

但 $c(n)$ 的精确值还不知道.(见 Cheeger,J.[310]1970,92,1:61-74)

7. **图论中的离散等周不等式**:给定图 G 及其顶点的集 A,对于 $t\geqslant 1$,以 A_t 表示 A 的 t 邻域与 A 距离不超过 t 的顶点的集合,若对每个具有 a 个顶点的 $A\subset V(G)$,有

$$|A_t|\geqslant f(a),\tag{3.60}$$

则称上式为一个等周不等式.特别地,若 A 是离散方体图的 $\sum\limits_{k=0}^{m}\binom{n}{k}$ 个顶点,则

$$|A_t|\geqslant\sum_{k=0}^{m+t}\binom{n}{k}\quad(\textbf{Harper 不等式.})\tag{3.61}$$

(见 Bollobas,B.等,J,Combinatorial Theory (A) 1991,56:47-74.)我们除了知道极少数重要的图类的最好的等周不等式外,还不知道大多数图的等周不等式.

此外,代数曲面和流形中的不等式,如代数曲面的 Noether 不等式;流形中的 Cohn-Vossen 不等式;Morse 理论中的 Morse 不等式:代数几何中的井草(Igusa)不等式等,因涉及较深的数学背景知识,读者可参考相应的专著.