§2　反三角函数不等式

1.　若 $0 < x < 1$,则

$$x < \arcsin x < \frac{x}{1-x^2}.$$

提示:利用 $\arcsin x$ 的 Taylor 级数展开式.

2.　若 $-1 \leqslant x < 1/\sqrt{2}$,则　$\arcsin x < \arccos x$;若 $1/\sqrt{2} < x \leqslant 1$,则不等号反向.

3.　若 $0 \leqslant x < 1/2$,则

$$\arcsin x < \arcsin(1-x).$$

4.　若 $-1 \leqslant x < 0$,则 $\arccos x^2 < \arccos x$.

5.　若 $0 < x < \pi$,则 $\arcsin(x/6) + \arcsin[(2/3)\sin(x/4)] < x/3$. 见[305]1991,98(1).

6.　若 $0 < x < 1$,则 $\sin(\arccos x) < \arcsin(\cos x)$.

提示:利用三角恒等式 $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$,

$\arcsin(\cos x) = \arcsin[\sin(\pi/2 - x)] = \pi/2 - x$,只要证 $\sqrt{1-x^2} < \pi/2 - x$.

7.　当 $|x| \leqslant 1$ 时,有 $\cos(\arcsin x) < \arcsin(\cos x)$.

提示:令 $x = \cos\alpha$,则 $\arcsin(\cos x) - \cos(\arcsin x) = \frac{\pi}{2} - x - \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - (\cos\alpha + \sin\alpha) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) > \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} > 0$.

8.　**Shafer-Fink 不等式:** $\dfrac{3x}{2+\sqrt{1-x^2}} \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi x}{2+(\pi-2)\sqrt{1-x^2}}$;

9.　**Carlson 不等式:** 当 $0 \leqslant x < 1$ 时,有

$$\frac{6\sqrt{1-x}}{2\sqrt{2}+\sqrt{1+x}} < \arccos x < \frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{1-x}}{(1+x)^{1/6}}.$$

10.　$|\operatorname{arctg} x| < \dfrac{2|x|}{1+\sqrt{1+x^2}} < 2$.

11.　$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant 2\left|\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{2}\right| \leqslant |x-y|$.

12.　**Rangarajan 不等式:** 设 $x < y$, $xy > -1$,则

$$\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{y-x}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}.$$ (见[4]P.462)

13.　设 $x > 0$,则

(1)　$\dfrac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < x$;　　(2)　$x - x^3/3 < \operatorname{arctg} x < x$.

(3)　$(x+x^{-1})\operatorname{arctg}x>1$.

提示:令 $\alpha=\operatorname{arctg}x$,则

$$(x+x^{-1})\operatorname{arctg}x=\frac{2\alpha}{\sin 2\alpha}>1.$$

14.　设 $x>0$,则

$$\frac{1}{2x}\ln(1+x^2)<\operatorname{arctg}x<(1+x)\ln(1+x);$$

而当　$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时,有 $\operatorname{arctg}x\geqslant\ln(1+x^2)-\ln 2+(\pi/4)$.

15.　[MCM]. 设 x,y,z 为正数,且　$\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y+\operatorname{arctg}z<\pi$. 则

$$xyz<x+y+z.$$

16.　设 $0<\alpha_k<\frac{\pi}{2}$. $\sum\limits_{k=1}^{n}(\sin\alpha_k)^2=1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\leqslant n\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$(程若礼,[348],2000,5:25－26)