§2　正交多项式不等式

一、 Chebyshev 多项式不等式

第一类 Chebyshev 多项式是在区间$[-1,1]$上的加权正交多项式,其权函数为

$$\omega_1(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},x\in(-1,1).$$

第一类 Chebyshev 多项式的标准化形式是:

$$T_n(x)=\begin{cases}\cos(n\arccos x), & |x|\leqslant 1,\\ \operatorname{ch}(n\operatorname{ch}^{-1}x), & |x|>1.\end{cases}$$

第二类 Chebyshev 多项式也是$[-1,1]$上的加权正交多项式,只不过其权函数为 $\omega_2(x)=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1]$.它的标准化形式是:

$$u_n(x)=\begin{cases}\sin(n\arccos x), & |x|<1,\\ \operatorname{sh}(n\operatorname{ch}^{-1}x), & |x|>1.\end{cases}$$

下面均在$[-1,1]$上讨论 $T_n(x),u_n(x)$.利用 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$和递推公式:

$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$可以得出 $T_0(x)=1,T_1(x)=x,T_2(x)=2x^2-1$, $T_3(x)=4x^3-3x,T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\cdots$,

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{n(n-k-1)!}{2(k!)(n-2k)!}(2x)^{n-2k},u_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

将$\{T_n(x)\}$标准正交化,记为

$$\hat{T}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}T_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \hat{T}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}T_n(x)\quad(n\geqslant 1).$$

当 $n\geqslant 1$ 时,$T_n(x)$ 的首项系数为 2^{n-1},因此,首项系数为 1 的 Chebyshev 多项式记为 $\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$,$\hat{u}_n(x),\tilde{u}_n(x)$作类似定义.

注　在$[-1,1]$上也可用 $T_{n+1}(x)$ 的导数来定义 $u_n(x)$,即

$$u_n(x)=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)=\sin[(n+1)\arccos x]\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

下面仍记 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 为$[-1,1]$上的 n 次代数多项式.$T_n(x)$ 的零点 $x_{k,n}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$.它们经常用作求积公式中的扦值结点.

1.　$|T_n(x)|\leqslant 1,|u_n(x)|\leqslant 1,x\in[-1,1],n=1,2,\cdots$,
仅当 x 为$u_{n-1}(x)$的零点和± 1时,$|T_n(x)|=1$;而仅当 $x=\pm 1$ 时,$|u_n(x)|=1$.

证　令 $x=\cos t$,则 $T_n(x)=\cos(nt)$.
从而$|T_n(x)|\leqslant 1$,仅当 nt 为π 的倍数时等号成立,再利用恒等式

$$\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}=\cos(nt)+\cos t\frac{\sin nt}{\sin t}$$

和数学归纳法即可推出 $|u_n(x)|\leqslant 1$,仅当 $|\cos t|=1$ 时等号成立.

2. $|x|>1$ 时,$|T_n(x)|\leqslant(|x|+\sqrt{x^2-1})^n$.

3. $|x_0|>1$ 时,有

$$|P_n(x_0)|\leqslant\begin{cases}\|P_n\|_c\cdot|T_n(x_0)|\\ \|P_n\|_c\cdot(|x_0|+\sqrt{x_0^2-1}|)^n,\end{cases}$$

证明见[60]上册 P50 - 51,56 - 57.

4. **Remez 不等式**:令 $E=\{x\in[-1,1]:|P_n(x)|\leqslant 1\}$,设 $\mu(E)\geqslant 2-\alpha$,式中 $0<\alpha<2$,则

$$\|P_n\|_c\leqslant T_n(\frac{4}{2-\alpha}-1).$$

见[327]1990,63(3):335.

5. 设 $a_2,\cdots,a_n$ 为任意实数,令 $P_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_kx^k$,式中 $a_1=1$,则 $\exists x\in(0,1)$,使得

$$|P_n(x)|\geqslant\frac{1}{n}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4n}).$$

提示:考虑多项式:

$$Q_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{1}{n}(\mathrm{tg}\frac{\pi}{4n})T_n[x(1+\cos\frac{\pi}{2n})-\cos\frac{\pi}{2n}].$$

式中 $T_n(y)$ 为第一类 Chebyshev 多项式.

令 $y=x(1+\cos\frac{\pi}{2n})-\cos\frac{\pi}{2n}$. $\quad x_k=\dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}-\cos\frac{k\pi}{2n}}{1+\cos\frac{\pi}{2n}}$, $k=1,2,\cdots,n$,

则 $0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$.

证 $|Q_n(0)|\leqslant\frac{1}{n}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4n}),Q_n(x_k)=(-1)^k\frac{1}{n}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4n})$.

用反证法.若 $\forall x\in(0,1)$,$|P_n(x)|<\frac{1}{n}\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4\pi})$.则 $G_n(x)=Q_n(x)-P_n(x)$ 至少有 $n+1$ 个实根,但 $G_n(x)$ 又是次数不超过 n 的多项式,所以 $Q_n(x)\equiv P_n(x)$.这与 $a_2,a_3\cdots,a_n$ 为一组任意实数相矛盾.详见[305]1964:14.

6. $\widetilde{T}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上与零的最大误差为最小,即对于首项系数为1的所有 n 次多项式 $P_n(x)$ 中,成立 $\|P_n\|_c\geqslant\|\widetilde{T}_n\|_c=\frac{1}{2^{n-1}}$.

7. **$T_n(x)$ 的导数不等式**:$|x|\leqslant 1$ 时,成立

(1) $|T_n^{(k)}(x)|\leqslant T_n^{(k)}(1),0\leqslant k\leqslant n$,特别,$|T'_n(x)|\leqslant n^2$.

证 令 $t=\arccos x$,则 $T_n(x)=\cos nt$.

$T'_n(x) = \dfrac{n\sin nt}{\sin t} = 2n[\cos(n-1)t + \cos(n-3)t + \cdots]$,用归纳法得到 $T_n^{(k)}(x) = \sum_{j=1}^{n-k}\lambda_j\cos jt$.其中所有 $\lambda_j = \lambda_j(k) \geqslant 0$,从而有 $|T_n^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n-k}\lambda_j = T_n^{(k)}(1)$.

(2) **Markov 不等式:** $\|(x^2-1)T_n^{(k+1)}(x) + kxT_n^{(k)}(x)\|_c \leqslant \|kT_n^{(k)}(x)\|_c$.见[332]1992,3:58.

8. 将 $T_n(x)$ 的零点简记为 $x_k = \cos t_k$ 式中 $t_k = \dfrac{2k-1}{2n}\pi$.$[-1,1]$上的连续函数 f 在 x_k 上的 n 次扦值多项式为

$$P_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[T'_n(t_k)]^{-1}\frac{T_n(x)}{x-x_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}f(x_k)\frac{\cos nt}{\cos t - \cos t_k}\sin t_k,$$

式中 $x = \cos t$,它的范数定义为

$$\|P_n\| = \max_{0\leqslant t\leqslant\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\cos nt}{\cos t - \cos t_k}\right|\sin t_k\right\}.$$

于是 $\|P_n\| = \dfrac{2}{\pi}\ln n + 1 - R_n$,式中 $0 \leqslant R_n < \dfrac{1}{4}$.(见[82]P.122)

若 $f \in C^n[-1,1]$,$P_n(x)$ 是以 $T_n(x)$ 的零点为结点的 Lagrange 扦值多项式,则

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!2^{n-1}}\|f^{(n)}\|_c.$$

9. 设 f 在$[-1,1]$上连续,f 的连续模 $\omega(f,\delta)$(见第 14 章 § 1)满足 Dini 条件:

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta)\ln\frac{1}{\delta} = 0,$$

则 f 可开展成 Fourier-Chebyshev 级数:$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{T}_n(x), x \in [-1,1]$,且该级数在$[-1,1]$上一致收敛,它的系数为

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(t)\hat{T}_n(t)\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

若 f 在$[-1,1]$上的 p 阶导数满足 α 阶 Lipshitz 条件,即 $f^{(p)} \in \mathrm{Lip}\alpha$ 且连续,则存在与 n,x 无关的常数 c,使得

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}a_k\hat{T}_k(x)\right| \leqslant \frac{c\ln n}{n^{p+\alpha}}, x \in [-1,1].$$

10. **Zolotareff 多项式不等式:**$[-1,1]$上 n 阶 Zolotareff 多项式:$z_\sigma(x) = x^n - n\sigma x^{n-1} + \cdots$,$(\sigma \geqslant 0)$是 Chebyshev 多项式的推广,$\sigma = 0$ 时,$z_\sigma(x)$ 就是 $T_n(x)$ 的倍数,当 $0 \leqslant \sigma \leqslant [\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2n})]^2$ 时,

$$z_\sigma(x) = \frac{1}{2^{n-1}\lambda^n}T_n[\lambda(x+1)-1] = x^n - n(\frac{1}{\lambda}-1)x^{n-1} + \cdots,$$

这时 $\sigma = \dfrac{1}{\lambda} - 1$, $\dfrac{1}{1+(\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n})^2} \leqslant \lambda \leqslant 1$.于是

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \|z_\sigma\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\left[1 + (\mathrm{tg}\frac{\pi}{2n})^2\right]^n.$$ 见[301]1986,18(1):97-106.

11. 设 $K_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ 是某个 n 次多项式,称为多项式核,通过 $K_n(x)$ 与 $[a,b]$ 上任一可积函数 f 作卷积 $P_n(x)=\int_a^b f(t)K_n(x-t)\mathrm{d}t$ 得到一个新的 n 次多项式. 下面令

$$c_n=\int_{-1}^{1}\left(\frac{T_{2n+1}(x)}{x}\right)^2\mathrm{d}x,\quad K_n(x)=\frac{1}{c_n}\left(\frac{T_{2n+1}(x)}{x}\right)^2.$$

则:

(1)　$c_n>n$;

(2)　$\int_{-1}^{1}K_n(x)\mathrm{d}x=1$;　而 $\forall\delta\in(0,1),\int_{\delta}^{1}K_n(x)\mathrm{d}x<\dfrac{1}{n\delta}$.

通过 $P_n(x)=\int_{-\frac{2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}}f(3t+x)K_n(t)\mathrm{d}t\quad(x\in[-1,1])$ 可以证明著名的 Weierstrass 逼近定理,细节参看[82]P106 - 111.

二、 Legendre 多项式不等式

Legendre 多项式 $P_n(x)$ 是 $[-1,1]$ 上以 $\omega(x)=1$ 为权函数的正交多项式,它由 Rodrigues 公式定义:

$P_n(x)=\dfrac{1}{n!2^n}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,n=0,1,2,\cdots,P_n(x)$ 有表示式:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}.$$

它是 Legendre 方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+n(n+1)y=0$$

限制于 $[-1,1]$ 的解,$P_n(x)$ 的标准正交化形式是

$$\hat{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x),n=0,1,2,\cdots$$

$P_n(x)$ 的头几项是:$P_0(x)=1,P_1(x)=x,P_2(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-1),P_3(x)=\dfrac{1}{2}(5x^3-3x),P_4(x)=\dfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3),P_5(x)=\dfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x),\cdots$,下述不等式中,没有指明 x 的取值范围时,均指 $|x|\leqslant1$.

1.　$P_n(x)\leqslant P_n(1)=1$,对于 $n\geqslant1$,仅当 $x=\pm1$ 时等号成立.

提示:利用 Legendre 多项式的生成函数

$\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$,它可写成:令 $x=\cos\theta$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t\cos\theta+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-te^{i\theta}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-te^{-i\theta}}}=$$
$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^ke^{ik\theta}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}t^me^{-im\theta}\right)$$

求出 $P_n(\cos\theta)$ 的系数，细节见[56]Vol. 2. P107.

2. $x>1$ 时 $\{P_n(x)\}$ 关于 n 是严格递增的，$P_{n-1}(x)<P_n(x)$.

3. 令 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}P_k(x)$. 则 $\forall x\in[-1,1]$，$S_n(x)\geqslant 0$，仅当 n 为奇数且 $x=-1$ 时等号成立.

4. **Bernstein 不等式**：设 $|x|<1$，则

$$|P_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{n\pi}}(1-x^2)^{-\frac{1}{4}};\text{即 }|P_n(\cos\theta)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{n\pi sin\theta}},\ 0<\theta<\pi;$$

$$|P_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}[n(1-x^2)]^{-\frac{1}{2}}.$$

5. **Fejer 不等式**：$|P_n(x)-P_{n+2}(x)|\leqslant\dfrac{4}{\sqrt{\pi(n+2)}}$.

6. $|P_{n+1}(x)+P_n(x)|<\dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n(1-x)}}$，$|x|<1$.

7. $x>1$ 时，$(n+1)(x-\sqrt{x^2-1})P_n(x)>nP_{n-1}(x)$.

8. 令 $G_n(x)=P_n^2(x)-P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)$，则

(1) $\dfrac{1-P_n^2(x)}{(2n-1)(n+1)}\leqslant G_n(x)<\dfrac{2n+1}{3n(n+1)}$;

(2) 当 $\dfrac{1}{2n+1}\leqslant x\leqslant 1$ 时，$G_n(x)$ 严格递减.

(3) **Turan 不等式**：$G_n(x)\geqslant 0$.

9. 令 $M_n=(n+\frac{1}{2})^{1/2}\max\{(\sin x)^{1/2}|P_n(\cos x)|:0\leqslant x\leqslant\pi\}$，则 M_{2k} 递增到 $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ (k\to\infty)$，且 $M_{2k-1}<M_{2k}<\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

证明见 Appl. Anal. 1982/83, 3: 237 - 240.

10. $|P'_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}n(n+1)\leqslant n^2$;

$$|P_n^{(k)}(x)|\leqslant 2^{2n-2}(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),\ 2\leqslant k\leqslant n;$$

$$|P_n^{(k)}(x)|\leqslant P_n^{(k)}(1)=\frac{(n+k)!}{2^k\cdot k!(n-k)!};$$

当 $|x|<1$ 时，$|P'_n(x)|\leqslant\sqrt{\dfrac{n}{\pi}}\cdot\dfrac{2}{1-x^2}$.

11. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1-P_n(x)}{(1-x)^{5/4}}dx<2^{5/4}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k}\right)^{1/2}$.

见[305]1980, 4: N. 6227.

12. $\displaystyle\left|\int_{-1}^{x}P_n(t)dt\right|\leqslant\frac{4}{(2n+1)\sqrt{\pi(n+1)}}<\frac{2}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}$.

证见[59]P. 200.

13. **Bruns 不等式**：令 $x=\cos\theta$，则 $P_n(\cos\theta)$ 在 $(0,\pi)$ 中的 n 个零点 θ_k（均为单零点）

满足:

$$\frac{k-(1/2)}{n+(1/2)}<\theta_k<\frac{k\pi}{n+(1/2)}.1\leqslant k\leqslant n.$$

1935 年 Szegö 用 Strum 方法改进了 Bruns 不等式,证明 $P_n(\cos\theta)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中的零点 θ_k 满足:

$$\frac{k-(1/4)}{n+(1/2)}\pi<\theta_k<\frac{k\pi}{n+1}.$$

(见莫叶,勒让得函数论,P214.230)

14. **Forsythe 不等式:**令

$$\Delta(n,k,j,x)=\begin{vmatrix}P_n(x) & P_{n+j}(x)\\ P_{n+k}(x) & P_{n+j+k}(x)\end{vmatrix}.$$

则当 $0<x<1$ 时, $\Delta(n,1,2,x)<0$; $\Delta(2n+1,2,2,x)<0$.

(见莫叶,勒让得函数,P.268.274)

15. 设 $f\in C^1[-1,1]$,则 f 的 Fourier-Legendre 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\hat{P}_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$,其中

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(t)\hat{P}_n(t)\mathrm{d}t.\text{记 }S_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{P}_k(x),$$

则 $S_n(f,x)$ 可以写成积分形式:

$$S_n(f,x)=\int_{-1}^{1}f(t)K_n(x,t)\mathrm{d}t.\quad L_n(x)=\int_{-1}^{1}|K_n(x,t)|\mathrm{d}t$$ 称为 Lebesgue 函数.则存在常数 c,使得

$$|K_n(x,t)|\leqslant\begin{cases}cn^2, & (|x|\leqslant 1,\ |t|\leqslant 1),\\ \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}, & (|x|<1,\ |t|\leqslant 1).\end{cases}$$

$$L_n(x)\leqslant\begin{cases}2cn^2 & |x|\leqslant 1\\ \dfrac{2c}{\sqrt{1-x^2}}n^{3/2}, & |x|<1.\end{cases}$$

见[305]1986,93(4):305.

三、 Hermite 多项式不等式

Hermite 多项式 $H_n(x)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上具有权函数 $\omega(x)=e^{-x^2}$ 的正交多项式,它可由 Rodrigues 公式定义: $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$.

它的前几项是: $H_0(x)=1$; $H_1(x)=2x$; $H_2(x)=4x^2-2$; $H_3(x)=8x^3-12x$; $H_4(x)=16x^4-48x^2+12$; $H_5(x)=32x^5-160x^3+120x,\cdots$.

$$H_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}.$$

$H_n(x)$ 满足微分方程：$y'' - 2xy' + 2ny = 0$.

$H_n(x)$ 的标准正交化形式是：$\hat{H}_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n!2^n\sqrt{\pi}}}H_n(x)$.

首项系数为 1 的 Hermite 多项式为 $\widetilde{H}_n(x) = \dfrac{1}{2^n}H_n(x)$.

1. $|H_n(x)| < n!\exp(|x| + (1/2))$.

证 在 $H_n(x)$ 的生成函数 $\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n!}H_n(x)$ 中，令 $t = e^{i\theta}$，由 Parseval 公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^2\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{H_n(x)}{n}\right)^2.$$

式中 $|f(\theta)| = \exp(-\cos2\theta + 2x\cos\theta)$. 再注意到 $|f(\theta)| < \exp(1 + 2|x|)$ 即可得证.

2. $|H_n(x)| < k \cdot 2^{n/2} \cdot \sqrt{n!}\exp(\dfrac{x^2}{2})$，式中 $k \approx 1.086435$；

3. $|H_{2m}(x)| \leqslant 2^{2m}m![2 - \dfrac{1}{2^{2m}}\dbinom{2m}{m}]\exp(\dfrac{x^2}{2})$；

$$|H_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{(2m+2)!}{(m+1)!} \cdot x \cdot \exp(\frac{x^2}{2}), (x \geqslant 0).$$

以上 N2 - 3 见[101]P.787.

四、 Jacobi 多项式不等式

Jacobi 多项式 $P_n(x;\alpha,\beta)$ 是 $[-1,1]$ 上以 $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \alpha,\beta > -1, x \in [-1,1]$ 为权函数的正交多项式，它由 Rodrigues 公式定义：

$$P_n(x;\alpha,\beta) = \frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}[(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(1-x^2)^n]^{(n)},$$

它的标准正交化形式是：

$$\hat{P}_n(x;\alpha,\beta) = \left(\frac{n!\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}\right)^{1/2}P_n(x;\alpha,\beta).$$

特别，当 $\alpha = \beta = 0$ 时，$P_n(x;0,0)$ 为 Legendre 多项式；

$\alpha = \beta = -1/2$ 时，$P_n(x;-1/2,-1/2)$ 为第一类 Chebyshev 多项式；

$\alpha = \beta = 1/2$ 时，$P_n(x;1/2,1/2)$ 为第二类 Chebyshev 多项式.

$$C_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1/2)\Gamma(2\alpha+n)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\alpha+n+1/2)}P_n(x;\alpha-\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}), (\alpha \neq 0)$$

称为超球多项式(Ultraspherical polynomials).

1. 设 $q = \max\{\alpha,\beta\}, \alpha,\beta > -1$，则当 $q \geqslant -1/2$ 时，$|P_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant \dbinom{n+q}{n} \approx n^q$；当 $q < -\dfrac{1}{2}$ 时，$|P_n(x;\alpha,\beta)| \leqslant |P_n(x_0;\alpha,\beta)| \approx \sqrt{\dfrac{1}{n}}$，式中极大值点 x_0 接近 $\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}$.

2. 若 $\alpha > 0$，则 $|C_n^{(\alpha)}(x)| \leqslant \dbinom{n+2\alpha-1}{n}$；

若 $-1/2<\alpha<0$,则 $|C_n^{(\alpha)}(x)|\leqslant|C_n^{(\alpha)}(x_0)|$.
式中当 $n=2m$ 时,$x_0=0$,当 $n=2m+1$ 时,x_0 接近于 0.

3. 当 $0<\alpha<1,0<\theta<\pi$ 时,

$$|C_n^{(\alpha)}(\cos\theta)|\leqslant 2^{1-\alpha}\frac{n^{\alpha-1}}{(\sin\theta)^{\alpha}\Gamma(\alpha)}.$$

上述 N1 ~ 3 见[101]P.786.

4. 设 $q=\max\{\alpha,\beta\}>-\frac{1}{2}$, $m+r>q+\frac{1}{2}$. $f^{(m)}\in \mathrm{Lip}r$,则 f 的 Fourier-Jacobi 级数 $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\hat{P}_k(x;\alpha,\beta)$ 在$[-1,1]$ 上一致收敛于 f,令 $S_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\hat{P}_k(x;\alpha,\beta)$,则

$$|f(x)-S_n(f,x)|\leqslant\frac{c_1}{n^{m+r}}n^t,x\in[-1,1].$$

式中常数 c_1 与 n,x 无关,$t=(2q+1)/2$.设 $\alpha,\beta\geqslant-1/2,n\geqslant2,E_n(f)$ 是 f 的最佳一致逼近(见第 14 章 §1),则成立下述加权估计:

$$(1-x^2)^{1/4}\sqrt{\omega(x)}\,|f(x)-S_n(f,x)|\leqslant c^2(\ln n)E_n(f).\ x\in[-1,1].$$

式中常数 c_2 也与 n,x 无关.

见 Szegö, G.. Orthogonal polynomials, Amer. Math, Soc. 1975.

5. 若 $|P_n(x)|\leqslant|P_n(x;\alpha,\alpha)|,x\in[-1,1]$,则
$\|P_n^{(k)}\|_c\leqslant\|(P_n(\alpha,\alpha))^{(k)}\|_c,1\leqslant k\leqslant n$.
[327]1996,84(2):129 - 138.

6. $P_n(x;\alpha,\beta)$ 的其他不等式见[153]P34 - 40.

五、 Laguerre 多项式不等式

Laguerre 多项式 $L_n(x,\alpha)$ 是在区间$(0,\infty)$上以 $\omega(x)=x^{\alpha}e^{-x}(\alpha>-1)$ 为权函数的正交多项式:$L_n(x,\alpha)=\frac{1}{n!}x^{-\alpha}e^{x}(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n)}$, $n=0,1,2,\cdots$.

它通过 Γ 函数表示成多项式的形式:

$$L_n(x,\alpha)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}.$$

它的标准正交化形式为

$$\hat{L}_n(x,\alpha)=(-1)^n\left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\right)^{1/2}L_n(x,\alpha).$$

$L_n(x,\alpha)$ 的头几项是:$L_0(x,\alpha)=1$; $L_1(x,\alpha)=(\alpha+1)-x$;
$L_2(x,\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha+2)(\alpha+1)-(\alpha+2)x+\frac{1}{2}x^2$;$L_3(x,\alpha)=\frac{1}{6}(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)-\frac{1}{2}(\alpha+3)(\alpha+2)x+\frac{1}{2}(\alpha+3)x^2-\frac{1}{6}x^3$;……,

$L_n(x,0)$ 记为 $L_n(x)$,因此,$L_n(x,\alpha)$ 有时称为广义 Laguerre 多项式,$L_n(x,\alpha)$ 满足 Laguerre 方程:

$$xy''+(\alpha-x+1)y'+ny=0,n=1,2,\cdots$$

$L_n(x,\alpha)$ 的生成函数为：

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x,\alpha)t^n.$$

1. $|L_n(x)|\leqslant\exp\left(\frac{x}{2}\right),(x\geqslant 0)$;

2. $|L_n(x,\alpha)|\leqslant\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}\exp\left(\frac{x}{2}\right),\quad(x\geqslant 0,\alpha\geqslant 0)$;

3. $|L_n(x,\alpha)|\leqslant\left(2-\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\exp\left(\frac{x}{2}\right),\quad(x\geqslant 0,-1<\alpha<0)$;

六、 Bernoulli 多项式不等式

Bernoulli 多项式 $B_n(x)$ 由它的生成函数定义：

$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!},\ |t|<2\pi.$$

$B_n=B_n(0)$ 称为 Bernoulli 数，$B_n(x)$ 可写成多项式形式：$B_0(x)=1$；$B_1(x)=x-\frac{1}{2}$；$B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}$；$B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$；…；

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k},n=0,1,2,\cdots,$$

$B_n(x)$ 可按下述递推公式来计算：$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k(x)=nx^{n-1},n=2,3,\cdots$.

1. $|B_{2n}(x)|<|B_{2n}|,n=1,2,\cdots,0<x<1$.

2. $|B_{2n}-B_{2n}(x-[x])|\leqslant|B_{2n}|$，且 $B_{2n}-B_{2n}(x-[x])$ 与 B_{2n} 同号.

3. $0<(-1)^{n+1}B_{2n+1}(x)<\frac{2(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}}\left(\frac{1}{1-2^{-2n}}\right),n=1,2,\cdots,0<x<\frac{1}{2}$.

七、 Euler 多项式不等式

Euler 多项式 $E_n(x)$ 由它的生成函数定义：

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},\ |t|<\pi.$$

$E_n=2^nE_n(1/2)$ 称为 Euler 数，$E_n(x)$ 可按下述递推公式计算：

$$E_n(x)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k(x)=2x^n.$$

特别，$E_0(x)=1,E_1(x)=x-\frac{1}{2},E_2(x)=x(x-1),\cdots$,

$$E_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{E_k}{2^k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

$E_n(x)$ 具有 Fourier 展开式：

$$E_n(x)=\frac{n!}{\pi^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)\pi x+(n+1)\pi/2]}{(2k+1)^{n+1}},0\leqslant x\leqslant 1,n\geqslant 1.$$

1.　$0<(-1)^n E_{2n}(x)<4^{-n}|E_{2n}|,\ 0<x<1/2,\ n=1,2,\cdots,$

2.　$0<(-1)^n E_{2n-1}(x)<\dfrac{4(2n-1)!}{\pi^{2n}}\left(1+\dfrac{1}{2^{2n}-2}\right),\ 0<x<\dfrac{1}{2},\ n=1,2,\cdots,$