§2 图论不等式

三有序组$(V(G),E(G),\varphi_G)$称为图,其中$V(G)$是非空结点集合,$E(G)$是边集合,φ_G是边集E到结点无序偶(或有序偶)集合上的函数.因为每条边总是关联两个结点,所以,图常记为$G=(V,E)$.在G中结点$v\in V$关联的边数称为结点度数,记为$\deg(v)$,$\Delta(G)=\max\{\deg(v):v\in V(G)\}$称为图$G$的最大度,$\delta(G)=\min\{\deg(v):v\in V(G)\}$称为图$G$的最小度;不含有平行边和环的图称为简单图,每对结点间都有边相连的简单图称为完全图.若$G_1=(V_1,E_1)$使得$E_1\subset E$,$V_1\subset V$,称G_1为G的子图.

1. **Turan 不等式**:不含r点完全图K_r的n点图的边数$m\leqslant\dfrac{(r-2)n^2}{2(r-1)}$,$r\geqslant 2$.

1999 年,Staton,W.给出了一个简洁的证明.见[305]1999,106(3):257－258.

2.　一组整数 $0\leqslant d_1\leqslant\cdots\leqslant d_n$,其和为偶数,可以实现为一个无环和无多重边的图的顶点度数,仅当 $\forall\, m:1\leqslant m\leqslant n-1$,成立

$$\sum_{k=1}^{m} d_k\leqslant m(m-1)+\sum_{k=m+1}^{n}\min\{m,d_k\}.$$

3.　**Sachs 不等式**:设 $\varphi(G)$ 为图 G 的色数,即使图 G 着色的最小颜色数,$W(G)$ 是图 G 的密度,即 G 的极大完全子图中的点数,则 $W(G)\leqslant\varphi(G)$.([147]P.5.).

4.　设 $\delta(G)$ 与 $\Delta(G)$ 是图的顶点的最小度和最大度. G_0 是 G 的导出子图,ε 为 G 的邻接矩阵的最大特征值,则;

(1)　$\varphi(G)\leqslant 1+\max\{\delta(G_0):G_0\subset G\}$;

(2)　$\varphi(G)\leqslant 1+\Delta(G)$;

(3)　**Wilf 不等式**:若 G 为连通的,则 $\varphi(G)\leqslant 1+\varepsilon$;仅当 G 为完全图或奇圈时等号成立.

(4)　设 p,q 分别为图 G 的点数和边数,则

$$\frac{p^2}{p^2-2q}\leqslant\varphi(G)\leqslant 1+\left(\frac{2q(p-1)}{p}\right)^{1/2}.$$

(5)　设 $\beta_0(G)$ 为 G 中两两不相邻的点的最大个数,则

$$\frac{p}{\beta_0}\leqslant\varphi(G)\leqslant p+1-\beta_0.\quad([147]\text{P}.6-8)$$

5.　设 l 是 G 中最长道路的长度,则 $\varphi(G)\leqslant l+1$;

6.　图 G 的初等同态 ε 是将 G 的两个非相邻的点同化,则

$$\varphi(G)\leqslant\varphi(\varepsilon(G))\leqslant 1+\varphi(G).$$

7.　**Fink 不等式**:

(1)　$2\sqrt{p}\leqslant\varphi(G)+\varphi(\overline{G})\leqslant p+1$;

(2)　$p\leqslant\varphi(G)\leqslant\varphi(\overline{G})\leqslant\left(\dfrac{p+1}{2}\right)^2$.

N.5－7.见[147]P.8－9,式中 $\overline{G}$ 是 G 的补图,即由图 G 中所有结点以及所有能使 G 成为完全图的添加边所组成的图.

8.　设 $P_\alpha(G)$ 为 G 的置换图,则

$$\varphi(G)\leqslant\varphi(P_\alpha(G))\leqslant\left\{\frac{4}{3}\varphi(G)\right\}.\quad([147]\text{P}.11)$$

9.　**Read 不等式**:$\varphi_G(\lambda)$ 表示最多用 λ 种颜色的图 G 的不同着色数,称为标定图 G 的色式,设 G 为连通图,则 $\varphi_G(\lambda)\leqslant\lambda(\lambda-1)^{p-1}$,$(\lambda\in N)$.

10.　**Vizing 不等式**:设 $\varphi_1(G)$ 是图 G 的线色数,即给 G 的边指定颜色使得没有两条邻接的边具有相同颜色的最小颜色数,则

(1)　$\Delta(G)\leqslant\varphi_1(G)\leqslant\Delta(G)+1$;

(2)　$2\left[\dfrac{p+1}{2}\right]-1\leqslant\varphi_1(G)+\varphi_1(\overline{G})\leqslant p+2\left[\dfrac{p+1}{2}\right]$;

(3) $0 \leqslant \varphi_1(G)\varphi_1(\overline{G}) \leqslant (p-1)([p/2]-1)$.

11. **全色数不等式**：设 $\varphi_2(G)$ 是图 G 的全色数，即给 G 的元素（点和边）着色使得相伴的元素（即相邻的点或边，或关联的点和边）具有不同颜色所需要的最小颜色数，$K_{n_1,n_2,\cdots n_k}$ 为完全 k- 部图，则

(1) $\varphi_2(K_{n,m,p}) \leqslant \Delta(K_{n,m,p}) + 2$.

(2) $\varphi_2(K_{n,n,\cdots,n}) \leqslant \Delta(K_{n,n,\cdots,n}) + 2$.

(3) **Behzad 猜想（全着色猜想）**：$\varphi_2(G) \leqslant \Delta(G) + 2$.

1971 年 Vijayaditva 证明对于 $\Delta \leqslant 3$ 时的图，该猜想是正确的. 见[147]P.17.

12. **消色数不等式**：图 G 的消色数 $\varphi(G)$ 是 G 的所有完全同态的最大阶，则

(1) $\varphi(G) \leqslant p - \beta_0(G) + 1$. (2) $\varphi(G) + \varphi(\overline{G}) \leqslant p + 1$.

见[147]P.18.

13. **连通度不等式**：$K(G)$ 表示图的（点）连通度，即使 G 不连通或成为一个点所要移去的点的最小数目.

(1) 若 H 是 G 的一个生成子图，则 $K(H) \leqslant K(G)$.

(2) **Whitney 不等式**：设 $\lambda(G)$ 表示 G 的线连通度，即使 G 不连通所需要移去的边的最小数目，则 $K(G) \leqslant \lambda(G) \leqslant \delta(G)$.（式中 $\delta(G)$ 见 N4）

(3) 设图 G 的 $p \geqslant 2$，则

$1 \leqslant \lambda(G) + \lambda \leqslant (\overline{G}) \leqslant p - 1$; $0 \leqslant \lambda(G)\lambda(\overline{G}) \leqslant M(p)$.

式中

$$M(p) = \begin{cases} \left[\dfrac{p-1}{2}\right]\left\{\dfrac{p-1}{2}\right\}, & \text{若 } p = 0,1,2 \bmod 4, \\ \left(\dfrac{p-3}{2}\right)\left(\dfrac{p+1}{2}\right), & \text{若 } p = 3 \bmod 4, \end{cases}$$

见[147]P.21 – 24.

14. **图的韧性不等式**：设 $m(G)$ 表示图 G 的分支数，$\tau(G)$ 为图 G 的韧性，即使 G 是 t- 柔韧的最大的 t，其中图 G 的 t- 柔韧是指对 G 的每个点集 A. $m(G-A) > 1 \Rightarrow |A| \geqslant tm(G-A)$，则

(1) $\tau(G) \geqslant m(G)/\beta_0(G)$;

(2) 若 $\tau(G) < \infty$，则 $\tau(G) \leqslant (1/2)m(G)$;

(3) 若 $\beta_0(G) \geqslant 2$，则 $\tau(G) \leqslant \dfrac{p - \beta_0(G)}{\beta_0(G)}$.

(Chvatal, 1973), [147]P.31.

15. **图的覆盖数与独立数不等式**：图 G 的点与边覆盖数分别记为 α_0, α_1，G 的一个点（或边）集中间没有两个相邻，则称是独立的，点（或边）独立集中的最大的点（或边）称为 G 的点（或边）独立数，分别记为 β_0, β_1.

(1) $\alpha_0(G) \geqslant \delta(G)$;

(2) $\alpha_0 \geqslant \beta_1, \alpha_1 \geqslant \beta_0$;

(3) $\beta_0(G) \leqslant \theta(G)$,式中 θ 是 G 的最小团数,这些团的顶点之并为 $V(G)$;

(4) 设 G 是偶图,则 $q \leqslant \alpha_0(G)\beta_0(G)$,仅当 G 为完全偶图时等号成立;

(5) 设 $\alpha_{00}(G)$ 是 G 的外固数,即覆盖 G 的点集所需要的最小点数,则

$$\alpha_{00}(G) \leqslant \alpha_0(G).$$

[147]P.32 - 35.

16. **图的点荫度不等式**:$\rho(G)$ 为 G 的点荫度,即是 G 的最小的子集数,G 的点集可以划分成这些子集使得每个子集导出一个无圈的子图,则

(1) $\rho(G) \leqslant 1 + \left[\dfrac{\max\delta(G_0)}{2}\right]$,式中 G_0 是 G 的导出子图.

(2) $\rho(G) \leqslant \varphi(G) \leqslant 2\rho(G)$.

[147]P.39 - 41.

17. **Ramsey 数不等式**:图 F_1 和 F_2 的 Ramsey 数 $r(F_1,F_2)$ 定义为使得对任何 n 阶图 G,F_1 是 G 的一个子图,或 F_2 是 $\overline{G}$ 的一个子图的最小整数 n.

(1) **GG(Greenwood-Gleason) 不等式**:

$$r(K_n,K_m) \leqslant r(K_n,K_{m-1}) + r(k_{n-1},K_m), \forall\, m,n \geqslant 2. \tag{2.1}$$

若右边的项都是偶数,则成立严格不等式.

(2) **ES(Erdös-Szekeres) 不等式**:

$$r(K_n,K_m) \leqslant \binom{n+m-2}{n-1}. \tag{2.2}$$

由此推出:$r(3,K_n) \leqslant (n^2+n)/2$.

(3) **Bondy-Murty 不等式**:设 $s = \min\{n,m\}$,则

$$r(K_n,K_m) \geqslant 2^{s/2}. \tag{2.3}$$

问题:为何确定 Ramsey 数,即使在完全图情形都仍然是一个未解决的问题.

见[147]P42 - 43.

(4) 刘富贵在[344]2002,32(1):97 - 99 中得到下述结果:设整数 $m,n,p \geqslant 3$,则

$$r(K_m,K_{n+p-2}) \geqslant r(K_m,K_n) + r(K_m,K_p) - 1. \tag{2.4}$$

但张忠辅举出反例证明(2.4)式不成立:$r(3,3)=6$,$r(3,4)=9$,但按(2.4)式,就会得出 $9 = r(3,4) = r(3,3+3-2) \geqslant r(3,3) + r(3,3) - 1 = 11$.(见[344]2002,32(4):686.)

我们问:使(2.4)式成立的条件是什么?

(5) $r(K_n,K_m) \geqslant \exp\left\{\dfrac{(K_n-1)(K_m-1)}{2(K_n+K_m)}\right\}$.

(Bolloba,B)

(6) 苏文龙对Ramsey数的下界作了深入的系统研究,参看[399]1999,12(6):121 - 122;[364]1999,29(5):408 - 413;[333]1997,42(22):2460;1998,43(12):1336 - 1337;广西民族学院学报 1997,3(2):119 - 120;4:6 - 7;Austra. J. Comb. 1999,19:91 - 99 等.

18. **广义 Ramsey 数不等式**:用 $F_k(1 \leqslant k \leqslant m)$ 的 Ramsey 数 $r(F_1,\cdots,F_m)$ 定义为

使得用 m 种颜色给K_n 的边着色时,对某种颜色 k,K_n 包含一个单色的F_k 的最小整数n.

(1) $r(K_{n_1},\cdots,K_{n_m}) \leqslant r(K_{n_1-1},K_{n_2},\cdots,K_{n_m}) + r(K_{n_1},K_{n_2-1},\cdots,K_{n_m}) + \cdots + r(K_{n_1},\cdots,K_{n_m-1}) - m + 2.$

(2) $r(K_{n_1+1},\cdots,K_{n_m+1}) \leqslant \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{m} n_k\right)!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}$

Bondy-Murty,1976.[147]P.48.

19. **图值函数不等式:**图 G 的线图$L(G)$定义为以 G 的边集作为$L(G)$的点集.两个点在$L(G)$中相邻(邻接),仅当它们对应的 G 的边相邻.图 G 的圈重数$CM(G)$定义为 G 的边不相交的圈的最大个数;G 的全图 $T(G)$ 是以 G 的元素(点和边)作为它的点,$T(G)$ 的两点相邻,仅当对应的元素是相伴的(相邻或关联的).

(1) $CM(L(G)) \geqslant CM(G_e) + \sum\limits_{k=1}^{p}\left[\dfrac{d(v_k)}{3}\left[\dfrac{d(v_k)-1}{2}\right]\right]$.式中 G_e 是由偶度点导出的子图.[·]是整数部分.

(2) $CM(T(G)) \geqslant q + CM(G_e) + \sum\limits_{k=1}^{p}\left[\dfrac{d(v_k)}{3}\left[\dfrac{d(v_k)-1}{2}\right]\right]$,$q$ 为G 的边数.

(3) $\alpha_1(G) \leqslant \beta_0(T(G)) \leqslant \left[\dfrac{3}{2}\alpha_1(G)\right]$,式中 $\alpha_1(G)$,$\beta_0(G)$分别是 G 的线覆盖数和点独立数.(Gupta.1969)[147]P.66 - 70.

20. **图的和与积不等式:**图 G 与H 的和$G+H$ 是由$G\cup H$ 及所有位于G 的每一顶点和 H 的每一顶点之间的边组成;图 G 与H 的卡氏积$G\times H$ 是点集为$V(G\times H) = V(G)\times V(H)$ 的图,边定义为:(v_1,u_1) 与(v_2,u_2) 邻接,若 $v_1 = v_2$ 且 u_1 与 u_2 邻接;或者 v_1 与 v_2 邻接且 $u_1 = u_2$,$\varphi_1(G)$,$\varphi_2(G)$ 分别见 N10.N11.G 的最大度记为$\Delta(G)$.注意 $\Delta(G\times H) = \Delta(G) + \Delta(H)$.若 $\varphi_1(G) \leqslant \varphi_2(H)$,则

$$\Delta(G) + \Delta(H) + 1 \leqslant \varphi_2(G\times H) \leqslant \varphi_2(H) + \varphi_1(G).$$

[147]P.77 - 81.

21. **图嵌入不等式:**图 G 的 betti 数 $b(G) = q - p + k$,式中 k 是G 的连通分支数;图 G 的亏格$\gamma(G)$是 G 能够嵌入其中的曲面的最小亏格.

(1) **Duke 猜想:**对任何通用,$b(G) \geqslant 4\gamma(G)$.

已知亏格为 0,1,2 的图,上式成立,亏格为 4 或大于 4 的图,猜想不成立,但对亏格为 3 的图,上式是否成立还未解决.

(2) 若用 G 嵌在曲面S 中,则 $q \leqslant 3p - 6\{1 - \gamma(S)\}$.

(3) 图 G 的糙度$c(G)$定义为 G 中边不相重的不可平面子图的最大个数,

① 若 $m = 3k+2, n = 3r+1$,则

$$c(K_{m,n}) \leqslant kr + \min\left\{\left[\frac{k+r}{3}\right],\left[\frac{2r}{3}\right],\left[\frac{8k+16r+2}{39}\right]\right\};$$

② 若 $m = 3k+2, n = 3r+2$,则

$$c(K_{m,n}) \leqslant kr + \min\left\{\left\lceil\frac{k+2r}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{2k+r}{3}\right\rceil, \left\lceil\frac{16k+16r+4}{39}\right\rceil\right\}.$$

Beineke-Guy[147]P.123 – 128.

22.　**图重构不等式**：$r(p,n)$ 是区别有 n 个点不标定的 p 阶图所需要的删点子图 $G_k = G - v_k$ 的最小个数，则

(1)　$r(p,p) \geqslant [\frac{p}{2}] + 2$.

(2)　当 $0 < n < p$ 时，$r(p,n) \geqslant \left[\frac{n+1}{2}\right] + 2$.

问题：(1) 与(2) 中的下界都不是最好的，为何求出最佳下界？

(3)　**重构猜想**：$r(p,p) \leqslant p$.

[147]P.143 – 144.

23.　**图的几何量不等式**：$g(G)$ 是图 G 的围长，即 G 中最短圈的长；$cr(G)$ 是 G 的周长，即 G 中最长圈的长；$e(G)$ 是 G 的点 v 的离心率，即遍历 G 的所有点 u 的 $d(v,u)$ 的最大值，$d(G)$ 是 G 的直径，即 G 的点的最大离心率，$r(G)$ 是 G 的半径，即 G 的点的最小离心率.

(1)　设 G 是连通的且不是树，则 $g(G) \leqslant 2d(G) + 1$;

(2)　$r(G) \leqslant d(G) \leqslant 2r(G)$;

(3)　设 $G, \overline{G}$ 都是连通的，则 $d(G) + d(\overline{G}) \leqslant p + 1$;

(4)　设 G 是连通的，且 G 的直径 $d(G)$ 简记为 d，则

$$2d - 3 - \frac{d^2 - d - 4}{p} \leqslant \frac{p^2 - 2q}{p}.$$

[147]P.188 – 189.

24. 我们在第 4 章 §3.三.N.6. 中提到图论中的离散等周不等式，但大多数图的等周不等式仍不知道.