第一章　基本不等式

§1　不等式的基本性质

一、　不等式的基本性质

从实数的有序性出发,容易证明实数的下述基本性质.

1.　**三分律**:任何两个实数 a,b 都有确定的序关系,即

　　$a < b, a = b, a > b$ 中有且仅有一个成立.

2.　**对逆性**:$a > b \Leftrightarrow b < a$.

3.　**序的传递性**:若 $a < b, b < c$,则 $a < c$.

4.　**加法的单调性**:若 $a < b$,则 $a + c < b + c$.

推论　(1)　若 $a < b, c < d$,则 $a + c < b + d$.

　　　(2)　若 $a < b, c > d$,则 $a - c < b - d$.

注意:同向不等式不能相减,异向不等式不能相加.

5.　若 $a < b, c > 0$,则 $ac < bc$.

　　若 $a < b, c < 0$,则 $ac > bc$.

推论　(1)　若 $a > b \geqslant 0, c > d \geqslant 0$,则　$ac > bd$.

　　　(2)　若 $a > b > 0, d > c > 0$,则　$\dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{d}$.

　　　(3)　若 $a > b, ab > 0$,则　$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

6.　设 $a > b \geqslant 0$,若 $c > 0$,则 $a^c > b^c$;若 $c < 0$,则 $a^c < b^c$.

7.　设 $x > y$,若 $a > 1$,则 $a^x > a^y$;若 $0 < a < 1$,则 $a^x < a^y$.

8.　设 $x > y > 0$,若 $a > 1$,则 $\log_a x > \log_a y$;若 $0 < a < 1$,则 $\log_a x < \log_a y$.

9.　设$\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$,且 b,d 同号,则

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}. \tag{1.1}$$

推论　设 $a < b, c > 0$,则　$\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+c} < 1$.

　　设 a_k 为实数,$b_k > 0, c_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\} \leqslant \frac{\sum a_k c_k}{\sum b_k c_k} \leqslant \max\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\}, \tag{1.2}$$

仅当序列 $a = (a_1,\cdots,a_n)$ 和 $b = (b_1,\cdots,b_n)$ 成比例时等号成立.特别,当所有 $c_k = 1$ 时,(1.2)式称为 **Cauchy 不等式**;若 c_k 还满足 $c_1 > c_2 > \cdots > c_n > 0$.则(1.2)式还可改进为

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\}\leqslant\min\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}\leqslant\frac{\sum a_kc_k}{\sum b_kc_k}\leqslant\max\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}\leqslant\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\},\tag{1.3}$$

式中 $\sigma_k=\left(\sum\limits_{j=1}^{k}a_j\right)/\left(\sum\limits_{j=1}^{k}b_j\right),1\leqslant k\leqslant n$.

10. 设 $a_k>0,b_k>0,,1\leqslant k\leqslant n$,则

$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\}\leqslant\left(\frac{\prod a_k}{\prod b_k}\right)^{1/n}\leqslant\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\cdots,\frac{a_n}{b_n}\right\}.\tag{1.4}$$

二、 绝对值不等式

1. $|a|\leqslant b,b>0\Leftrightarrow -b\leqslant a\leqslant b$.

特别地,$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$,仅当 $a\leqslant0$ 时,左边的等号成立;而仅当 $a\geqslant0$ 时,右边的等号成立.

2. $|a|>b>0\Leftrightarrow a>b$ 或 $a<-b$.

3. **三角不等式:** $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,仅当 $ab\geqslant0$ 时等号成立.

推论 1 $|a+b|\geqslant\big||a|-|b|\big|$,仅当 $ab\leqslant0$ 时等号成立;

推论 2 设 $\{a_k\}$ 为实或复数列,则

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|;$$

推论 3 $\left|\sum a_k\right|\geqslant|a_j|-\sum\limits_{k\neq j}|a_k|$.

4. 设 $z=x+iy$ 为复数,$\bar{z}=x-iy$ 为 z 的共轭复数,则 $|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z|$,

$$\max\{|x|,|y|\}\leqslant|z|\leqslant 2\max\{|x|,|y|\},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|,\tag{1.5}$$

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.\tag{1.6}$$

仅当 $z_1\bar{z}_2\geqslant0$ 时,(1.6) 式右边的等号成立,而仅当 $z_1\bar{z}_2\leqslant0$ 时,(1.6) 式左边的等号成立,当 $z_1\neq0,z_2\neq0$ 时,(1.6) 式右边仅当存在 $c<0$,使 $z_2=cz_1$ 时等号成立.

5. **Hlawka 不等式:**

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|-|a_1+a_2|-|a_2+a_3|-|a_3+a_1|+|a_1+a_2+a_3|\geqslant0.\tag{1.7}$$

当 a_1,a_2,a_3 为 R^m 中的向量或实赋范线性空间中的向量,(1.7) 式仍成立. 见[305]1965,72:753 - 754. 2000 年,Takahasi,S. E. 等推广了(1.7)式并证明了在 Banach 空间$(X,\|\cdot\|)$中(1.7)式与下述 **Djokovic 不等式**等价:

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left\|\sum_{m=1}^{k}a_{i_m}\right\|\leqslant\binom{n-2}{k-1}\sum_{k=1}^{n}\|a_k\|+\binom{n-2}{k-2}\left\|\sum_{k=1}^{n}a_k\right\|,(2\leqslant k\leqslant n-1),$$

见[303]2000,3(1):63 - 67 和[398]2000,1(3):343 - 350.

1963 年 Freudenthal,H 提出:设 $a_k \in R^m$.对于什么样的 n,成立

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i + a_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |a_i + a_j + a_k| - \cdots + (-1)^{n-1} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geqslant 0$$

1997 年 Jiang-cheng 证明上式仅对 $n=1, n=2$(Minkowski 不等式)和 $n=3$(即(1.7)式)成立.见 Vietnam J. Math,1997,25(3):271－273.

1964 年 Adamovic 将(1.7)式推广为

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i + a_j| \leqslant (n-2)\sum_{k=1}^{n} |a_k| + \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|. \tag{1.8}$$

式中 $a_k \in R^m$,见[355]1964,1(16):39－43.

6. **Hornich 不等式**:设 $a, a_k \in R^m$ 满足

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = -ta, t \geqslant 1, \tag{1.9}$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k + a| - |a_k|) \leqslant (n-2)|a|. \tag{1.10}$$

注意当(1.9)式中的 $t<1$ 时,(1.10)式不一定成立.

[4]2.25.3 中利用(1.7)式,对(1.10)式给出了一个简洁的证明.

三、　超距不等式

距离空间(X,d)中的距离 d 满足

三角不等式　$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z), x,y,z \in X.$　(1.11)

其加强形式　$d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}$　(1.12)

称为**超距不等式**　当 $d(x,y) \neq d(y,z)$ 时,(1.12)式中等号成立.

四、　不等式延拓原理

设(X,d)为距离空间,$\overline{R} = [-\infty, \infty]$为广义实直线,$f, g: X \to \overline{R}$ 为连续映射,A 为 X 的稠密子集.若 $\forall x \in A, f(x) \leqslant g(x)$,则 $\forall x \in X, f(x) \leqslant g(x)$.(证明见[74]Vol.1,P57)