§3 微分不等式

1. **微分中值定理**:在现行数学分析教材中,微分中值定理都写成等式形式:$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$,式中 c 只知道与 b,a,f 有关,并不知道 c 的确切值,实际上,只要知道 f' 的上下确界,即令 $m=\inf\{f'(x):x\in(a,b)\}$. $M=\sup\{f'(x):x\in(a,b)\}$,就得到

$$m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a). \tag{3.1}$$

这就表明,微分中值定理的实质是由不等式(3.1)而非等式的形式所揭示出来,它有以下改进和推广:

(1) 设 $f\in C[a,b]$,f 在开区间(a,b)上存在单侧导数 $f'_-(x)$,$f'_+(x)$,则存在 $c:a<c<b$,使得

$$f'_-(c)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_+(c). \tag{3.2}$$

或上式中两个不等号均反向.

(2) 在(3.1)中的 m,M 的定义式中,$f'(x)$ 还可减弱为单侧导数 $f'_-(x)$,$f'_+(x)$,或 Dini 导数,如

$$D^+f(x)=\limsup_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

见[305]1986,93(6):471 - 475.

(3) 设 $f'\in C[a,b]$,$\|f''\|_\infty<\infty$,则

$$M-\frac{b-a}{2}\|f''\|_\infty\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant m+\frac{b-a}{2}.$$

(Ostrowski[21]P.535)

(4) 设$(X,\|\cdot\|)$为 Banach 空间,区间$[a,b]$为 R^1 中有限闭区间,$f:[a,b]\to X$ 为连续映射,$\varphi:[a,b]\to R^1$ 为连续函数,若存在$[a,b]$的一个可数子集 A,使得 $\forall x\in[a,b]-A$,f,φ 在 $c\in[a,b]$ 都存导数,并且 $\|f'\|\leqslant\varphi'(c)$,则

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\varphi(b)-\varphi(a). \tag{3.3}$$

证明见[74]Vol.1.P171 - 175.

2. 设 f 在半开区间$[0,1)$上有连续导数,且 $|f'(x)|\leqslant M(1-x)^{\alpha-1}(0<\alpha\leqslant1)$,则对$[0,1]$中任意 x_1,x_2,有

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant (M/\alpha)|x_1-x_2|^{\alpha}. \tag{3.4}$$

3. **混合和方向导数不等式**:设 G 是 R^n 中开集,$X(G)$ 表示 $C(G)$ 或 $L^p(G)(1\leqslant p<\infty)$,$\partial f/\partial\zeta$ 表示 f 沿 ζ 方向的方向导数. 若 $f\in X(G)$,且对任意方向 ξ,$D_\xi^k(f)\triangleq\partial^k f/\partial\xi^k\in X(G)$,$\|D_\xi^k\|_X\leqslant M$,则沿任意 k 个方向 $\xi_1,\cdots,\xi_k$,有 $\|D_{\xi_1}\cdots D_{\xi_k}(f)\|_X\leqslant\sup\limits_{\xi}\|D_\xi^k(f)\|_X$. 见[308](1990)108,(1):177 - 185.]

4. **Mahler 不等式**:设 P_n 是复系数 n 次代数多项式,首项系数为 a,零点为 z_k,$1\leqslant k\leqslant n$,P_n 的 Mahler 测度 $M(P_n)$ 定义为

$$M(P_n)=\exp\int_0^1\log|P_n(\exp(2\pi it))|\,\mathrm{d}t=a\prod_{j=1}^n\max\{1,|z_j|\}.$$

则 $M(P'_n)\leqslant mM(P_n)$. 见[305]1991,98:451 - 452.

5. **Landau-Kolmogorov 不等式(L-K 不等式)**:

(1) 设 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间,$f^{(n)}\in X$,$0<k<n$,则古典的 Landau-Kolmogorov 不等式为

$$\|f^{(k)}\|\leqslant C(n,k,X)\|f^{(n)}\|^{k/n}\cdot\|f\|^{1-\frac{k}{n}}. \tag{3.5}$$

当 $X=L^\infty(R^1)$ 时,$C(n,k,L^\infty(R^1))$ 的最佳值于 1938 年由 Kolmogorov 求出为:

$$C(n,k,L^\infty(R^1))=\frac{K_{n-k}}{K_n^{\frac{(n-k)}{n}}},\text{式中 } K_n=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)^{n+1}\text{ 为 Favard 常数.}$$

$$(K_0=1,K_1=\frac{\pi}{2},K_2=\frac{\pi^2}{8},K_3=\frac{\pi^2}{24},\cdots,\text{见 Ch11 §2})$$

$1<C(n,k,L^\infty(R^1))<\frac{\pi}{2}$,当 $n\to\infty$ 时,$C(n,1,L^\infty(R^1))\to1$,$C(n,n-1,L^\infty(R^1))\to\frac{\pi}{2}$. 证明见[82]$P$.241 - 244.

特别地,成立 **Landau-Hadamard 不等式**:

$$\|f'\|\leqslant\sqrt{2}\|f''\|^{1/2}\|f\|^{1/2}. \tag{3.6}$$

注 若不要求 $C(n,k,L^\infty(R^1))$ 的最佳值,如证 $C(n,k,L^\infty(R^1))=2^{k(n-k)}$,证明的难度就大大降低,如在[74]Vol. 1,P210 就作为习题出现.

(2) 将上述 R^1 改为 $R^+=(0,\infty)$ 时,要确定 $C(n,k,L^\infty(R^+))$,似乎更困难些,1955 年,Matorin, A. P. 证明

$$C(n,k,L^\infty(R^+))\leqslant\frac{T_n^{(k)}(1)}{(n!)^{k/n}2^{(1-\frac{1}{n})k}}.$$

式中 $T_n(x)$ 为 n 阶 Chebyshev 多项式,1967 年,Steckin, S. B. 证明:当 $1\leqslant k\leqslant n/2$ 时,成立

$$a\left(\frac{n}{k}\right)^k\leqslant C(n,k,L^\infty(R^+))\leqslant b\left(\frac{e^2n}{4k}\right)^k,$$

而当 $n/2\leqslant k<n$ 时,成立

$$a(n-k)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}\leqslant C(n,k,L^\infty(R^+))\leqslant b\left(\frac{2n}{n-k}\right)^{n-k},$$

式中 a,b 为正的常数.

1975 年,Kupcov,N. P.,证明了 $L^2(R^+)$ 中的常数 $C(n,k,L^\infty(R^+))$:

$$C(n,k,L^2(R^+)) = \left[\frac{1}{\alpha(n,r)}\left\{\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k/n} + \left(\frac{k}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{n}}\right\}\right]^{1/2},$$

式中 $0 < \alpha(n,r) < \dfrac{n}{k^{\frac{k}{n}}(n-k)^{\frac{n-k}{n}}}$. $\alpha(n,n-k) = \alpha(n,k)$,

$\alpha(2,1) = 1, \alpha(3,1) = \alpha(3,2) = \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \approx 0.555669$.

见 Proc. Steklov Inst. Math, 1975, 138: 94 – 117.

又如记 $a = \left(\dfrac{\|f\|}{\|f''\|}\right)^{1/2}$,在 $[0,\infty)$ 或 $[0,b]$ $(b \geqslant a)$,(3.6) 式应改为 $\|f'\| \leqslant 2\|f\|^{1/2}\|f''\|^{1/2}$,而在 $[0,d]$ $(d < a)$ 上则成立 $\|f'\| \leqslant \dfrac{2}{d}\|f\| + \dfrac{d}{2}\|f''\|$.

(3) 记 $m(f) = \inf\{f(x): x \in R^+\}$, $M(f) = \sup\{f(x): x \in R^+\}$. 设 $f \in C^2(R^+)$, $f^{(3)}$ 在 R^+ 上存在,且 f 在 R^+ 上非负有界. 若 $m(f') \leqslant 0$, $M(f^{(3)}) < \infty$, $f''(0) \leqslant 0$, 则 $M(f^{(3)}) \geqslant 0$ 且

$$-m(f')^3 \leqslant \left(\frac{9}{8}\right)\|f\|^2 M(f^{(3)});$$

若 $m(f^{(3)}) > -\infty$, $M(f') \geqslant 0$, $f''(0) \geqslant 0$,则

$$-m(f^{(3)}) \geqslant 0 \text{ 且 } M(f')^3 \leqslant \left(\frac{9}{8}\right)\|f\|^2(-m(f^{(3)})).$$

(见 Boyadziev, K. N., The Math, Student, 1982, 50: 214 – 218)

若令 $\omega(f) = M(f) - m(f) = \sup\{f(x) - f(y): x, y \in R^+\}$,则

$$\|f'\|_\infty^2 \leqslant \frac{1}{2}\omega(f)\omega(f'').$$

(Saffari, B. [54]6; 另见[54]5: 367 – 379)

(4) 1987 年 Kuptsov, N. P. 证明

$$\|f\|_c \leqslant C(n,k,L^2(R^+))(\|f\|_2^2 + \|f^{(n)}\|_2^2). \tag{3.7}$$

式中 C 范数,L^2 范数均在 $R^+ = (0,\infty)$ 上取,而精确常数的渐近估计式为

$$C(n,k,L^2(R^+)) = \frac{1}{(2k+1)(k!)^2\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{2k+1}} + O(n^{2k-1})\ (n \to \infty).$$

见[405], 1987, 41(3): 313 – 319, 456.

(5) **Stein 不等式**:设 $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$, $f^{(n)} \in L^1$,则

$$\left(\frac{\|f^{(n-k)}\|_1}{K_k\|f^{(n)}\|_1}\right)^{1/k} \leqslant \left(\frac{\|f\|_1}{K_n\|f^{(n)}\|_1}\right)^{1/n}, \tag{3.8}$$

式中 K_k, K_n 为 Favard 常数,见[311]1957, 65(3): 582 – 592. 该不等式的更一般形式见孙永生[68] 上册 P. 463.

(6) 设 $\partial/\partial\varepsilon_k$ 表示沿 ε_k 方向的导数,Laplace 算子的 n 次迭代 $\Delta^m f \in L^\infty(R^n)$, $0 < k < 2m$,则

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} \cdots \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} f \right\| \leqslant C(m, k, L^{\infty}(R^n)) \| f \|^{1-\frac{k}{2m}} \| \Delta^m f \|^{\frac{k}{2m}}. \tag{3.9}$$

(见 Ditzian, Z., Math, Proc, Camb. Phil, Soc, 1989, 105(2): 335 - 350)

1998 年, Chen Q. D. Zhou X. L. 证明

$$\| D_{\xi_1} \cdots D_{\xi_k} f \|_q \leqslant C \| f \|_p^{1-\alpha} \| \Delta^m f \|_r^{\alpha},$$

式中 Δ 为 R^n 中 Laplace 算子. $0 \leqslant k \leqslant 2m, 1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $2m - \frac{n}{r} + \frac{n}{p} > 0$, $\alpha = \frac{2m - k + (n/q) - (n/r)}{2m - (n/r) + (n/p)} > 0$. 见[301]1998, 226(1): 130 - 142.

(7) **分数阶导数不等式**:设 $0 < r < 1$,定义 f 的 r 阶导数为

$$f^{(r)}(x) = \frac{\Gamma(r+1)\sin(r\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+r}} \mathrm{d}t.$$

记 $\| f \|_{\infty} = \sup\{ | f(x) | : x \in (-\infty, \infty) \}$.

$$\| f \|_{\delta} = \sup \left\{ \frac{| f'(x) - f'(y) |}{| x - y |} : | x - y | < \delta < \infty, x, y \in R^1 \right\}$$

则 $$\| f^{(r)} \|_{\infty} \leqslant C_r \| f \|_{\infty}^{1-(\frac{r}{2})} \| f \|_{\delta}^{r/2}, \tag{3.10}$$

式中 $C_r = \frac{\Gamma(r+1)\sin(r\pi)}{r(1-r)(2-r)\pi} 2^{2-(\frac{r}{2})} (2^{1/(1-r)} - 1)^{r-1}$ 为最佳常数. (见 Trudi Mat. Meh instituta, 1965, 50: 42 - 54 或[21]P. 11)

有限区间上的 L-K 不等式中的精确常数,则呈现出复杂情形,如下述(8) ~ (16).

(8) 设 $f'' \in L^2[a, b], f'(x) = 0, x \in [a, b]$,则

$$\| f' \|_2^2 \leqslant C \| f \|_2 \| f'' \|_2. \tag{3.11}$$

式中最佳常数 $C = 2.33759\cdots$,见 Gillman, D. 等, [392]1988, 111: 335 - 342.

(9) **微分插值不等式**:若 f 在[0,1]上二阶连续可微,则必存在与 f 无关的常数 M,使得

$$\| f' \|^2 \leqslant M \| f \| (\| f \| + \| f'' \|),$$

式中 $\| f \| = \max\{ | f(x) | : 0 \leqslant x \leqslant 1 \}$.

证 不妨设 $f(x) \neq 0$ 且取实数值. 令 $0 \leqslant \varepsilon < 1/4$,由微分中值定理,必有 $t_1 \in (t + \varepsilon, t + 2\varepsilon)$,使得

$$\frac{1}{\varepsilon}[f(t + 2\varepsilon) - f(t + \varepsilon)] = f'(t_1) = f'(t) + \int_t^{t_1} f''(\tau) \mathrm{d}\tau,$$

因为 $t_1 - t < \varepsilon$,所以,由上式,有

$$| f'(t) | \leqslant \left| \frac{1}{\varepsilon}[f(t + 2\varepsilon) - f(t + \varepsilon)] \right| + \int_t^{t_1} f''(\tau) \mathrm{d}\tau \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \| f \| + \varepsilon \| f'' \|,$$

只要令 $\varepsilon = (1/4) \cdot \| f \|^{1/2} (\| f \| + \| f'' \|)^{-1/2}$ 即可得证.

Whitneg-Timan 不等式:若 $f^{(m)} \in L^p[a, b], 1 \leqslant p < \infty$ 则存在仅依赖于 m 和$[a, b]$的常数 C_{mk},使得

$$\| f^{(k)} \|_p \leqslant C_{mk} (\varepsilon^{-k} \| f \|_p + \varepsilon^{m-k} \| f^{(m)} \|_p). \tag{3.12}$$

式中 $0<\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$,$0\leqslant k<m$,当 $f^{(m)}\in C[a,b]$ 时,上述 $\|\cdot\|_p$ 改为 $\|\cdot\|_c$.见[81]P.85.

若 $f\in C^2[a,b]$,$a\leqslant x<y\leqslant b$,则

$$\|f'\|\leqslant\frac{1}{y-x}|f(y)-f(x)|+\frac{1}{2}[b-a+|a+b-x-y|]\|f''\|.$$

(Gavrea,J.,Rasa,J.,Rev. Anal. Numer. Theor. Approx. 1993,22(2):173 - 176)

设 $f^{(n-1)}$ 在 R^1 上局部绝对连续(即在每个有限区间上绝对连续),$\varepsilon>0$,S_ε 是 R^1 上具有步长为 ε 的网格,$0\leqslant k<n$,则

$$\|f^{(k)}\|_\infty\leqslant C_n\inf_{\delta\geqslant\varepsilon}\{\delta^{-k}\|f\|_{S_\varepsilon}+\varepsilon^{n-k}\|f^{(n)}\|_\infty\},\tag{3.13}$$

式中 $\|f\|_{S_\varepsilon}=\sup\{|f(x)|:x\in S_\varepsilon\}$,常数 C_n 仅依赖于 n.(Konovalov,V.N.,Mat. Zametki,1980,27:209 - 215)

Nirenberg,L.还研究了形如

$$\|f^{(k)}\|_p^p\leqslant\varepsilon\|f^{(n)}\|_p^p+C(\varepsilon)\|f\|_p^p\quad 1\leqslant p<\infty\tag{3.14}$$

和

$$\|f^{(k)}\|_\infty\leqslant\varepsilon\|f^{(n)}\|_\infty+C(\varepsilon)\|f\|_\infty\tag{3.15}$$

的不等式.见[312]1955,8:649 - 675.

设 $f^{(n-1)}\in AC[0,1]$,则

$$\|f^{(n-2)}\|_\infty\leqslant 4^{n-2}(n-1)!\|f\|_\infty+(1/2)\|f^{(n)}\|_\infty,n>4.$$

(Babenko,V.F.等,Ukrain,Mat,Zh,1995,47(1):105 - 107)

微分扦值不等式可推广到高维空间,例如,设 A 与 B 为 R^n 中紧子集,f 在 B 附近有二阶连续编导数,则存在与 f 无关的常数 C,设得

$$(\sup_A\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha f|^2\leqslant C(\sup_B|f|)[\sup_B|f|+\sum_{|\alpha|=2}\sup_B|D^\alpha f|].$$

(10) **Gorny 不等式**:设 $f^{(n)}\in C[-1,1]$,则

$$\|f^{(k)}\|_c\leqslant n^{2k}\|f\|_c+\frac{2^{n-k}}{(n-k)!}\|f^{(n)}\|_c.\tag{3.16}$$

式中 $0\leqslant k\leqslant n$,它可推广为:设 $f^{(n)}\in C[a,b]$,则对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$,有

$$\|f^{(k)}\|_c\leqslant|T_n^{(k)}(\pm1)|\cdot\|f\|_c^{1-\frac{k}{n}}\left[\max\left\{\frac{\|f^{(n)}\|_c}{\|T_n^{(n)}\|_c},\left(\frac{\varphi}{b-a}\right)^n\|f\|_c\right\}\right]^{k/n},\tag{3.17}$$

式中 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式.

(11) **Hardy 不等式**:设 $f\in L^2(R^1)$,$f^{(n-1)}$ 在 R^1 上局部绝对连续,$0<m<k<n$,$h>0$.$\Delta_{\pi h}^m(f)$ 为 f 的步长为 πh 的 m 阶向前差分,则

$$\|f^{(k)}\|_2\leqslant\frac{n-k}{n}h^{-k}\cdot2^{-m}\|\Delta_{\pi h}^m(f)\|_2+\frac{k}{n}h^{n-k}\|f^{(n)}\|_2.$$

式中 $\|f\|_2=\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{R^1}|f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$.$\Delta_R^1(f,x)=f(x+h)-f(x)$,$\Delta_h^m(f,x)=\Delta_h^1(\Delta_h^{m-1}(f,x))$.见 Taikov,L.V. [405],1992,52(4):106 - 111)

(12) 设区间 $D\subset R^1$,D 的长为 a,记 $\|f^{(k)}\|_\infty=\sup\{|f^{(k)}(x)|:x\in D\}$,则

$$\|f^{(k-1)}\|_\infty\leqslant\left(\frac{8}{a}\right)^{k-1}\|f\|_\infty+\frac{a}{2}\|f^{(k)}\|_\infty,\tag{3.18}$$

特别,当 $k=2$,$D=[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]$ 时,

$$|f'(x)|\leqslant\frac{2}{a}\|f\|_\infty+\left(\frac{4x^2+a^2}{4a}\right)\|f''\|_\infty,x\in D.\tag{3.19}$$

提示:对 $f(\frac{a}{2})-f(x)$ 与 $f(-\frac{a}{2})-f(x)$ 作 Taylor 级数展开,见[74]Vol.1.P210.

若 $\mu(E)\geqslant a>0$,则

$$\|f\|_\infty\leqslant\frac{1}{\sqrt{a}}\|f\|_2+\sqrt{a}\|f'\|_2.$$

证明见[129]P499.

(13) 设区间 $D\subset[-1,1]$,D 的长为 a,记

$$\|f^{(k)}\|_D=\min\{|f^{(k)}(x)|:x\in D\}.$$

若将 D 分为三个相邻的区间 D_1,D_2,D_3,中间的区间的长为 b,则当 $k\leqslant n$ 时,成立

$$\|f^{(k)}\|_D\leqslant\frac{1}{b}(\|f^{(k-1)}\|_{D_1}+\|f^{(k-1)}\|_{D_3}),\tag{3.20}$$

对 k 用归纳法,可推出

$$\|f^{(k)}\|_D\leqslant 2^p\left(\frac{k}{a}\right)^k,\tag{3.21}$$

式中 $p=\frac{1}{2}k(k+1)$,见[74]Vol.1.P202.

(14) 设 $a>0$,$f^{(3)}\in AC[0,a]$,$f^{(4)}\in L^\infty[0,a]$,则

$$\|f^{(k)}\|\leqslant C_k\|f\|^{1-\frac{k}{4}}\|f^{(4)}\|^{k/4},k=1,2,3,\tag{3.22}$$

式中当 $a^4\|f\|^{-1}\|f^{(4)}\|\geqslant 48(17+12\sqrt{2})$ 时,$c_1=2^{5/2}\times 3^{-\frac{1}{4}}$,$c_2=10\times 3^{-\frac{1}{2}}$,$c_3=2^{3/2}\times 3^{1/4}$.(Zvyagintsev, A. I., Latv. Mat. Ezhegodnik, 1988, 32: 187 - 189, 244)

(15) 设 $f^{(n-1)}\in AC[0,a]$,$f^{(n)}\in L^\infty[0,a]$,$n\geqslant 2$,$0<k<n$,则

$$\|f^{(k)}\|_\infty\leqslant A_{n,k}a^{-k}\|f\|_\infty+B_{n,k}a^{n-k}\|f^{(n)}\|_\infty,\tag{3.23}$$

特别当 $a^n\|f\|_\infty^{-1}\|f^{(n)}\|_\infty\geqslant\beta_n$ 时 $\|f^{(k)}\|_\infty\leqslant C_{n,k}\|f\|_\infty^{(1-(k/n))}\|f^{(n)}\|_\infty^{(k/n)}$.

$$\tag{3.24}$$

式中所有常数 $A_{n,k},B_{n,k},C_{n,k},\beta_n$ 的最佳值均已求出,见 Latv. Mat. Ezhegodnik, 1988, 32: 183 - 186, 244.

(16) 设 f 与直至 $f^{(n-1)}\in AC[a,b]$,则

$$\|f^{(k)}\|_c\leqslant C(n,k)\|f\|_cM^k,\qquad 1\leqslant k\leqslant n-1,\tag{3.25}$$

式中 $M=\max\left\{\frac{2}{b-a},\left(\frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{\|f\|_c}\right)^{1/n}\right\}$, $C(n,k)\leqslant T_m^{(k)}(1)(1+\frac{1}{n!})+\frac{1}{(n-k)!}$,

$T_m(x)=\cos(m\arccos x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式.当 x 远离 a 与 b 时,不等式仍可改

进,见[82]P238－241.

(17)　设 f 在 $[a,b]$ 上 n 阶可导,$0<k<n$,则

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leqslant 4e^{2k}\binom{n}{k}^k \|f\|_\infty^{1-\left(\frac{k}{n}\right)} M^{\frac{k}{n}}, \tag{3.26}$$

式中　$M=\max\left\{\|f^{(n)}\|_\infty, \dfrac{n!}{(b-a)^n}\|f\|_\infty\right\}$. 若 $[a,b]$ 换成 $(0,\infty)$ 或 R^1,则 $M=\|f^{(n)}\|_\infty$. 参看[322]1939,71:318－358,或[21]P.7.

(18)　1990 年 Brown,.R.C. 和 Hinton,D.B. 研究了形如

$$\left(\int_E |x^\beta f^{(k)}(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant C\left(\int_E |x^s f(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1-\lambda}{q}} \left(\int_E |x^\alpha f^{(n)}(x)|^r \mathrm{d}x\right)^{\lambda/r} \tag{3.27}$$

成立的充分条件,其中 $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$, $0\leqslant k\leqslant n-1$. $f^{(n-1)}$ 绝对连续,细节见[21]P.51－52.

(19)　1998 年,Ilyin,A.A. 还得出 $\|f^{(k)}\|_\infty \leqslant C(k,m)\|f\|_2^{1-\alpha}\|f^{(m)}\|_2^\alpha$ 中 $C(k,m)$ 的最佳值.

(式中 $\alpha=\dfrac{2k+1}{2m}$, $-\dfrac{1}{2}<k<m-\dfrac{1}{2}$). 见[317](2),1998,58(1):84－96.

[21]整个第一章详细总结了从 1913 年到 1990 年对 L-K 不等式研究的历史,各种改进和推广,列出参考文献达 217 篇,但这 217 篇文献远非完整. 例如上面一些结果和[61][68],[82]等,就不在这些文献中,特别是没有收录我国学者的工作。孙永生的专著[68]上册用了一章(第六章)120 页的篇幅讨论了到二十世纪八十年代初期为止对L-K 不等式的种种改进和推广,以及在函数逼近论中的广泛而深刻的应用,收集了我国学者,包括孙永生、黄达人、王建忠等的重要贡献.

1990年后,这方面的研究仍在不断深化,继 Stein,E.M. 将 L-K 不等式推广到 L^p 空间后,1996 年,Ha Huy Bang 又将其推广到 Orlicz 空间(见[301]1996,203(3):861－867),2000 年 Bang Ha Huy,Babenko 等又将其推广到其他的抽象空间,见[359]2000,61(1):153－159,和 Dokl. Akad. Nauk 1997,356(4):439－441. 2000 年 Ditzian,Z. 概述了 L-K不等式新的研究成果和未解决的问题,提出了若干猜想,并证明了当 $X=L^p(R^1)$, $0<p<1$ 时 L-K 不等式不成立. 见[303]2000,3(1):15—24. [21]还收集了半群和群上算子的 L-K 不等式. 1995 年 Rassias,T.M. 推广了这些结果.

设 X 为复 Banach 空间,$t\to T(t)$ ($\|T(t)\|\leqslant 1, t>0$) 是 X 上强连续收缩半群,它的无穷小生成算子是 A. 则 $\|Ax\|^2\leqslant \dfrac{4}{3}\|x\|\,\|A^2x\|$, $x\in D(A^2)$;

$\|Ax\|^3\leqslant\dfrac{9}{8}\|x\|^2\|A^3x\|$, $\|A^2x\|^3\leqslant 3\|x\|\,\|A^3x\|^2$, $x\in D(A^3)$;

$\|Ax\|^4\leqslant\dfrac{1024}{3}\|x\|^3\|A^4x\|$, $\|A^2x\|^4\leqslant\dfrac{10^4}{3}\|x\|^2\|A^4x\|^2$,

$\|A^3x\|^4\leqslant 192\|x\|\,\|A^4x\|^3$, $x\in D(A^4)$.

见[301]1996,202(1):280－301.

综上所述,L-K不等式的研究从1913年Landau发表从"$|f(x)|\leqslant 1$, $|f''(x)|\leqslant 1\Rightarrow$

$|f'(x)| \leqslant 2$”算起,已经历了将近一个世纪,而且从20世纪60年代以来一直是不等式的研究热点之一,分析其原因,我们认为:

第一,L-K不等式研究的内涵十分丰富.

孙永生在[68]P.497－498提出了关于L^p空间中的L-K不等式的一般形式:

给定$k,n \in N, 0 \leqslant k < n, 1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$,区间$D$表示$[0,a], R^+ = (0,\infty)$或$R^1$, $f^{(n-1)}$在D上局部绝对连续,$f^{(n)} \in L^p(D), \alpha,\beta > 0, \alpha + \beta = 1, \alpha = \left(n - k - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$ $/\left(n - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)$,则

$$\| f^{(k)} \|_q \leqslant C \| f \|_r^{\alpha} \| f^{(n)} \|_p^{\beta}. \tag{3.28}$$

式中常数C与n,k,p,q,r,α,β,f有关,还与区间D有关,为何确定C的最佳值?是一个复杂的问题.至今还没有完全解决,将$L^p(D)$空间换成其他函数空间,相应的结果还不多.将f换成不同的算子,算子半群,还有将(3.28)式右边换成两个范数之和或换成三个或三个以上范数的积或和,例如,1997年,Babenko等研究了在有限区间上形如

$$\| f^{(k)} \|_q \leqslant C_1 \| f \|_p + C_2 \| f^{(n)} \|_r$$

的不等式,其中$1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty, 0 < k < n$.见Ukrain Mat. Zh. 1997,49(5):619－628.说明还有许多工作值得进一步去做,研究范围是十分广泛的.

第二,L-K不等式研究的深化,需要新的数学工具.例如可微函数类的L-K不等式的证明,用到著名的Kolmogorov比较定理(见下面N.6.);而对常系数线性微分算子的L-K不等式的证明用到函数重排;周期卷积类的L-K不等式的证明用到卷积变换技巧,而逼近论中样条理论的发展使得人们对L-K不等式有了新的认识,尤其是完全样条为L-K不等式的研究提供了新的工具.

第三,随着对最佳逼近极值问题研究的进展,逐步揭示了L-K不等式与逼近论的极值问题有着深刻的联系,包括宽度问题,最佳求积问题,函数类的最佳逼近问题等等,这类问题在数值分析、应用数学、计算机科学中都有广泛的应用背景.例如,L-K不等式与最佳数值微分问题及k重微分(无界)算子D^k的稳定计算有关,它还反映了可微函数类的嵌入性质.这就说明,L-K不等式在21世纪仍是值得关注的研究方向.

6. **Kolmogorov比较定理**(1939):设$\lambda > 0$,令

$$\varphi_{\lambda,0}(x) = \operatorname{sgn}(\sin\lambda x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)\lambda x}{2k+1};$$

当$r = 2m+1, m = 0,1,2,\cdots$,时,

$$\varphi_{\lambda,r}(x) = \int_{\frac{\pi}{2\lambda}}^{x}\varphi_{\lambda,r-1}(t)\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi\lambda^r}(-1)^{\frac{r+1}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\lambda x}{(2k+1)^{r+1}};$$

当$r = 2m, m = 1,2,\cdots$,时,

$$\varphi_{\lambda,r}(x) = \int_{0}^{x}\varphi_{\lambda,r-1}(t)\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi\lambda^r}(-1)^{r/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(xk+1)\lambda x}{(2k+1)^{r+1}},$$

于是当$r \geqslant 1$时,$\varphi_{\lambda,r}(x)$是$\varphi_{\lambda,0}(x)$的r次积分,其周期为$(2\pi)/\lambda$,周期平均值为零.

设f的$r-1$阶导数在R^1上局部绝对连续(即在每个有限区间上绝对连续),且

$\| f^{(r)} \|_\infty \leqslant 1$,若 $\exists \lambda > 0$,使得

(1) $\| f \|_\infty \leqslant \| \varphi_{\lambda r} \|_c$,

(2) 存在两点 $x_1, x_2 \in R^1$,使得 $f(x_1) = \varphi_{\lambda r}(x_2)$.

则 $| f'(x_1) | \leqslant | \varphi'_{\lambda r}(x_2) |$. (3.29)

证明见[61]P.100 - 104.

推论 设 $f^{(r-1)}$ 在 R^1 上局部绝对连续,且 $\| f^{(r)} \|_\infty \leqslant 1$,若 $\exists \lambda > 0$,使得 $\| f \|_\infty \leqslant \| \varphi_{\lambda r} \|_c$,则

(1) $\| f^{(k)} \|_\infty \leqslant \| \varphi_{\lambda, r-k} \|_\infty, k = 1, \cdots, r$. (3.30)

(2) R^1 上的连续模满足:$\omega(f, t) \leqslant \omega(\varphi_{\lambda r}, t), 0 \leqslant t < \infty$; (3.31)

(3) 若 $\exists x_0, y_0$,使得 $f(x_0) = \varphi_{\lambda, r}(y_0)$,$[a, b]$ 是包含 y_0 的区间,$\varphi_{\lambda, r}$ 在 $[a, b]$ 上单调.

若 $\varphi_{\lambda, r}(t)$ 在 $[a, b]$ 上递增,则

$$f(x_0 + x) \leqslant \varphi_{\lambda, r}(y_0 + x), 0 \leqslant x \leqslant b - y_0, \tag{3.32}$$

$$f(x_0 - x) \geqslant \varphi_{\lambda, r}(y_0 - x), 0 \leqslant x \leqslant y_0 - a. \tag{3.33}$$

若 $\varphi_{\lambda, r}(t)$ 在 $[a, b]$ 上递减,则(3.32)与(3.33)式中的不等号均反向.特别地,若 $f(x_0) = \varphi_{\lambda, r}(y_0) = 0$,则

$$| f(x_0 + x) | \leqslant | \varphi_{\lambda, r}(y_0 + x) |, \quad | x | \leqslant \frac{\pi}{2\lambda}. \tag{3.34}$$

Kolmogorov 比较定理是证明当 $X = L^\infty(R^1)$ 时的 L-K 不等式(3.5)的基本工具,它在逼近论极值问题中也有许多应用.

$L^p(R^1)$ 中的 Kolmogorov 比较定理:设 $f^{(r-1)}$ 在 R^1 上局部绝对连续.$\| f^{(r)} \|_\infty \leqslant 1$,且

$$\| f \|_\infty \leqslant \| \varphi_{nr} \|_c; \quad \max_{a, b} \left| \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant 2 \| \varphi_{n, (r+1)} \|_c.$$

则 $\| f \|_p \leqslant \| \varphi_{nr} \|_p, 1 \leqslant p < \infty$. (3.35)

证明见[61]P.105 - 108,比较定理推广到线性微分算子.见[68]上册 P.439 - 453.

7. 设 $f, g \in AC[a, b]$,g 在 $[a, b]$ 上还严格递增且为凹函数,若 $f(a) = g(a)$,$f(b) > g(b)$,或 $f(b) = g(b)$.$f(a) < g(a)$.则 $\exists x, y \in (a, b)$,使得 $f(x) = g(y)$,且

$$f'(x) > g'_-(y). \tag{3.36}$$

式中 $g'_-(y)$ 是 g 在 y 点的左导数.

证明见[61]P.98 - 99,这是证明 N.6.比较定理的引理.

8. 设 f 在 R^1 上非负可微,$0 < p \leqslant 1$,则

$$| f'(x) |^{p+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p [f(x)]^p \sup\left\{ \frac{| f'(x \pm h) - f'(x) |}{h^p} : h > 0 \right\}, \tag{3.37}$$

式中 $f'(x \pm h)$ 在 $f'(x) \leqslant 0$ 时取"+"号,在 $f'(x) \geqslant 0$ 时取"-"号,常数 $(1 + 1/p)^p$ 是最佳的.见[392]1989,112A:331 - 341.

9. **Wirtinger 不等式**:设 $f^{(n-1)}\in AC[a,b]$, $f^{(n)}\in L^q[a,b]$, f 在 a 点有 k 重零点,在 b 点有 $n-k$ 重零点,$0\leqslant k\leqslant n$, $1\leqslant p,q\leqslant\infty$,则

$$\|f\|_p\leqslant C(n,k,p,q)(b-a)^{n+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f^{(n)}\|_q, \tag{3.38}$$

式中

$$C(n,k,p,\infty)=\frac{B(pk+1,pn-pk+1)}{n!}, 1\leqslant p<\infty,$$

$$C(n,k,\infty,\infty)=\frac{k^k(n-k)^{n-k}}{n!(n-k)!},$$

$$C(n,k,1,\infty)\leqslant C(n,k,p,q)\leqslant C(n,k,\infty,1); C(2,1,2,2,)=\frac{1}{\pi^2}.$$

但在一般情形下,如何求出 $C(n,k,p,q)$ 的最佳值却是一个十分庞大的研究课题. [21] 第二章 P66 - 113 专门介绍了相关的不等式,并引用了 218 篇论文,下面几个不等式和下一章的某些积分不等式实际上仍然涉及这一研究课题,例如, *Traple, J.* 给出 **Wirtinger 不等式的加权形式**:设 $f,g\in AC[0,a]$, $f(0)=f(a)=0$, $g(0)=g(a)=0$, ω 在 $[0,a]$ 上非负连续,则 $\int_0^a|fg|\omega\leqslant\frac{a}{8}\left(\int_0^a\omega\right)\left[\int_0^a(|f'|^2+|g'|^2)\right]$.
当 $f=g\equiv 0$ 或 $\omega(x)=0$ a.e. 于 $[0,a]$ 时等号成立. 见[21]P95.

(1) 设 $f'\in L^2[0,2\pi]$, $\int_0^{2\pi}f=0$,则 $\|f\|_2\leqslant\|f'\|_2$.
仅当 $f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x$ 时等号成立. 见[1]P207,定理 258.

对于非周期情形,设 $f'\in L^2(a,b]$, $f(a)=f(b)=0$,则 $\|f\|_2\leqslant\frac{b-a}{\pi}\|f'\|_2$.

(2) 若 $f''\in L^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$, $\int_a^b f=0$,则

$$\|f\|_2\leqslant\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2\|f''\|_2.$$

若 $f\in AC(a,b)$, f 的 Fourier 级数在 (a,b) 上一致收敛, $f(a)=f(b)$, $\int_a^b f=0$,则上式可改进为

$$\|f\|_2\leqslant\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2\|f''\|_2. \qquad ([21]P68)$$

(3) 设导数 f' 在 (a,b) 上有界, $f(a)=f(b)=0$. 将 (a,b) 分解为两个互不相交的可测子集 A,B,则

$$\int_a^b f^2\leqslant\frac{(b-a)^2}{8}\int_A(f')^2+\|f\|_\infty(b-a)\int_B|f'|;$$

$$\int_a^b|ff'|\leqslant\frac{(b-a)^2+8}{16}\int_A(f')^2+\|f\|_\infty\left(\frac{b-a}{2}+1\right)\int_B|f'|.$$ (见[21]P68 - 69).

(4) **Northcott 不等式**:设 $f^{(k-1)}\in AC[0,2\pi]$, $\int_0^{2\pi}f=0$,则 $\|f\|_\infty\leqslant\frac{4}{\pi}K_k\|f^{(k)}\|_\infty$,

式中 $K_k=\sum_{m=0}^\infty\frac{(-1)^{m(k+1)}}{(2m+1)^{k+1}}$ 为 Favard 常数. ([317]1939, 14:198 - 202)

(5) 设 $f' \in L^{2n}[-\pi,\pi], f(\pi)=f(-\pi), \int_{-\pi}^{\pi} f^{2n-1}=0$,则

$$\|f\|_{2n} \leqslant \left(\frac{1}{2n-1}\right)^{1/2n}\left(n\sin\frac{\pi}{2n}\right)\|f'\|_{2n}.$$

等号成立的情形见 Trans. Roy. Soc. Canada Sect. Ⅲ. 1959,53(3):21 - 30.

(6) 设 $f \in AC[0,\pi/2), f(0)=0, p>1$,则

$$\|f\|_p \leqslant \left(\frac{1}{p-1}\right)^{1/p}\left(\frac{p}{2}\sin\frac{\pi}{p}\right)\|f'\|_p,$$

等号成立和更一般的情形见 Beesack[313]1961,11:39 - 61.

(7) **Schmidt 不等式**:设 $0<p\leqslant\infty$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, $a\leqslant x_0\leqslant b$, $f\leqslant AC[a,b]$, $f' \in L^p[a,b], r=1+(1/p)-(1/q), f(x_0)=0$,则

$$\|f\|_p \leqslant W\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\frac{x_0-a}{b-a}\right)C(p,q)(b-a)^r\|f'\|_q,$$

式中 $W(t,x)\in[1/2,1]$ 定义为

$$W(t,x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}+\left|\dfrac{1}{2}-x\right|\right)^{1+t}, & -1\leqslant t\leqslant 0,\\ \left(x^{1+(1/t)}+(1-x)^{1+(1/t)}\right]', & 0<t<\infty,\end{cases}$$

$C(p,q)\in(0,1]$ 定义为 $C(p,q)=A(p,q)B(p,q)$,

$A(p,q)=\left(\frac{1}{p}\right)^{1/p}\left(\frac{1}{q'}\right)^{1/q'}u^{-u}$,式中 $u=\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}$,

$B(p,q)=\Gamma\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}\right)\left[\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{q'}\right)\right]^{-1}, \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$,

(Waldron, Shayne, East J. Approx. 1997,3(2):117 - 135)

(8) ***W - B* 不等式(Wirtinger - Beesack 不等式)**:设 $f \in AC[a,b], \omega_1, \omega_2$ 为非负可积权函数,则

$$\|f\|_{2,\omega_1} \leqslant \|f''\|_{2\omega_2}.$$

(Demonstr. Math, 1999,32(3):495 - 502)

(9) 设 $f' \in C[0,2\pi], \int_0^{2\pi} f=0$,则

$$\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{\pi/6}\,\|f'\|_2.$$

(Alzer, H., Math. Pannonica, 1999,3(1):83 - 89)

(10) **加权 Wirtinger 不等式**:设 f, f_k, g 都在 $[0,a]$ 上绝对连续,w 是 $[0,a]$ 上正的可积权函数,$\alpha,\beta\geqslant 1$,则

$$\|wfg\|_1 \leqslant (a/8)\|w\|_1(\|f'\|_2^2+\|g'\|_2^2);$$

$$\|wf^\alpha g^\beta\|_1 \leqslant a^{\alpha+\beta-1}\cdot 2^{-(\alpha+\beta+1)}\|w\|_1(\|f'\|_{2\alpha}^{2\alpha}+\|g'\|_{2\beta}^{2\beta});$$

$$\|wf_1^2\cdots f_n^2\|_1 \leqslant (a/4)^n\|w\|_1\|f_1'\|_2^2\cdots\|f_n'\|_2^2;$$

$$\|wfg'\|_1+\|wf'g\|_1 \leqslant (\sqrt{a}/2)\|w\|_2(\|f'\|_2^2+\|g'\|_2^2);$$

$$\|wf^{2\alpha}\|_1 \leqslant a^{2\alpha-1}\cdot 2^{-2\alpha}\|w\|_1\|f'\|_{2\alpha}^{2\alpha},$$

见[301]1986,117,(2):318 – 325,[330]1986,17(1):69 – 73.

(11) **Poincare 不等式**:[4]§2.23.1 对于 Wirtinger 不等式的历史发展和各种推广作了详细的讨论,其中高维 Wirtinger 不等式又称为球面上的 Poincare 不等式.

10. **Hardy 不等式**:设 $p>1,q>0,w_0,w_k$ 是$(0,1)$上 a.e. 为正的可测函数,Kufner Alois 研究了下述高阶 Hardy 不等式:

$$\| f \|_{q,w_0} \leqslant c \| f^{(k)} \|_{p,w_k},$$

式中 $\| f^{(k)} \|_{p,w_k} = \left(\int_0^1 | f^{(k)}(x) |^p w_k(x) \mathrm{d}x \right)^{1/p}$,

$f^{(0)}$ 表示 f,c 为正常数,见 Bayreuther Math. Schr, 1993, 44:105 – 146. 1986 年,Mingarelli, A. B. 对于 R^1 上权函数 $\omega(x) = \exp(\alpha x^2)(\alpha>0)$,证明 $\| f \|_{\alpha,\omega} \leqslant (2\alpha)^{(-1/2)} \| f' \|_{2,w}$.

见 Bull, Inst. Math. Acad, Sinica, 1986, 14(3):287 – 288. 我们在第 13 章 N3 再详细讨论 Hardy 不等式.

11. **Levin 不等式**:设 $f \in C^n[a,b]$,且满足 $f(x_1) = f'(x_2) = \cdots = f^{(n-1)}(x_n) = 0, \forall x_k \in [a,b]$,则

$$\| f \|_c \leqslant C_n (b-a)^n \| f^{(n)} \|_c, \tag{3.39}$$

式中 $C_{2n-1} = \dfrac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}, C_{2n} = \dfrac{E_n}{(2n)!}$,

B_n, E_n 分别为 Bernoulli 数和 Euler 数. 见 Soviet Math. 1961, 2:523 – 524.

12. 设 $f \in C^n[a,b]$,f 在$[a,b]$内有 n 个零点(包括在 a 和 b 的零点),则

$$\| f \|_c \leqslant \frac{(n-1)^{n-1}(b-a)^n}{n!n^n} \| f^{(n)} \|_c; \tag{3.40}$$

$$\| f^{(k)} \|_c \leqslant \frac{k(b-a)^{n-k} \| f^{(n)} \|_c}{n(n-k)!}. 1 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{3.41}$$

(见[21]P.80) 特别, $\| f \|_c \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{8} \| f'' \|_c, \| f' \|_c \leqslant \dfrac{b-a}{2} \| f'' \|_c$.

13. **Sobolev 不等式**:

(1) 设 $f \in AC[0,a]$,$f(0) = f(a) = 0, 1 \leqslant q < \infty, 1 < p < \infty, 1/p + 1/p' = 1$,则

$$\| f \|_q \leqslant a^t \frac{q(1+p'/q)^{1/p}}{2(1+\frac{q}{p'})^{1/q} B(\frac{1}{q}, \frac{1}{p'})} \| f' \|_p, \tag{3.42}$$

式中 $B(\alpha,\beta)$ 为 Beta 函数, $t = (1/q) + (1/p')$.

(2) 设 f 在 R^n 上具有紧支集且充分光滑. $1<p<n$. 则

$$\| f \|_q \leqslant C(n,p) \| \nabla f \|_p, \tag{3.43}$$

式中 $|\nabla f|$ 是 f 的梯度 ∇f 的长度: $|\nabla f| = \left(\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,

$$C(n,p) = \frac{1}{\pi^{1/2} n^{1/p}} \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{1-(\frac{1}{p})} \left[\frac{\Gamma(1+\frac{n}{2})\Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n}{p})\Gamma(1+n-\frac{n}{p})} \right]^{1/n}.$$

仅当 $f(x)=(a+b\,|x|^{\frac{p}{p-1}})^{1-(\frac{n}{p})}$, $a,b>0$ 时等号成立,其中 $|x|=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}$,(1),(2) 中的常数都是最佳的.

(Talenti, G.. Istit. Mat. Univ, Firenze, 1974 – 75, 22:1 – 32)

14. **(1) 反向 Poincare 不等式**:设 f 在 $[0,a]$ 上非负递增且有一阶连续导数. $p>2$, $m\geqslant 1$,则

$$\left[\int_0^a (f')^{1/p}\right]^p \leqslant \frac{a^{p-m-1}}{m^{p-2}} B\left(\frac{1}{m},\frac{p-2}{p-1}\right)^{p-1}\left(\int_0^a f(x)x^{m-1}\mathrm{d}x\right),$$

式中 $B(\cdot,\cdot)$ 为 Beta 函数 .(Benguria, R. D. 等[302]2000, 5(1):91 – 96)

(2)　设 f'' 在 $[0,\infty)$ 上连续, $\alpha\geqslant 0$,则

$$\left(\int_0^\infty [f'(t)]^2 t^{1+\alpha}\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^\infty [f(t)]^2 t^\alpha \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^\infty t^\alpha[(1+\alpha)(f'(t))^2+t^2(f''(t)^2]\mathrm{d}t\right).$$

设式中的积分均收敛.(Pachpatte, B. G., Stud, Univ. Babes-Bolyai, Math. 1993, 38(4):26 – 29)

(3)　设 $f\in C^1[a,b]$, $f(a)=f(b)$, $p>1$ 且 p 是奇整数之商,若 $f\not\equiv 0$, $\int_a^b f^p=0$,则

$$\|f'\|_p \geqslant c(p)\left(\frac{4}{b-a}\right)\|f\|_p. \tag{3.44}$$

式中 $c(1)=1$, $c(p)=(p-1)^{1/p}\dfrac{(\pi/p)}{\sin(\pi/p)}$, $p>1$.(Feinberg, J. M., [385]1979, 10:1258 – 1271)

15.　设 $f\in AC[0,2\pi]$, $f'\in L^2(0,2\pi)$, $f(0)=f(2\pi)$,

$\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x=0$, $k=0,1,\cdots,n-1$,则

$$\|f'\|_2 \geqslant n\|f\|_1^{1/2}. \tag{3.45}$$

仅当 $f(x)=C_1\cos nx+C_2\sin nx$, $x\in[0,2\pi]$ 时等号成立.

(Everitt, W. N., Lecture Notes Math, 1976, 564:93 – 105)

16.　设 $f\in C^2[a,b]$, $f(a)=f(b)=0$,则

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{1-(1/p)}\|f''\|_p,\quad p>1. \tag{3.46}$$

这相当于 $N.9.(3.38)$ 中, $C(2,1,\infty,p)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p-1}{2p-1}\right)^{1-(1/p)}$.

(Lupas, A., [331]1980, 678 – 715:24 – 28 或[21]P247 – 257)

17.　设 $f\in C^2(-\infty,\infty)$, $\lambda>0$,则

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{\lambda}\|f''-\lambda f\|_\infty;\quad \|f'\|_c \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|f''-\lambda f\|_c.$$

(Muldowney, J. S., Proc. roy, Irish Acad., Sect. A 1976, 76:85 – 100)

18.　**Aumann 不等式**:设 $f\in C^2[a,b]$, $f(a)=0$. $f(b)\geqslant 0$, $\|f\|_c>0$,则

$$\min_{x\in[a,b]}\left|\frac{[f'(x)]^2}{f''(x)}\right| \leqslant \max\left\{\|f\|_c, \frac{[f(b)]^2}{8\|f\|_c}+\frac{\|f\|_c}{2}\right\}.$$

若 f 为复函数,则上式中 $\|f\|_c$ 换成 $\|\operatorname{Im} f\|_c$. 见[354]1933,37:578－581.

19. **Borel 不等式**:设 $f\in C^{\infty}[0,1]$, $f(1)=1$, $f^{(k)}(0)=0$, $1\leqslant k\leqslant n-1$, $\|f^{(k)}\|_{\infty}=\sup\{|f^{(k)}(x)|:x\in[0,1]\}$,则存在与 f,n 无关的常数 M,使得

$$\sum_{k=1}^{n}\|f^{(k)}\|_{\infty}^{-1/k}\leqslant M.$$

20. **Turan 不等式**:设 $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$, w 是 (a,b) 上正的可积函数, $\int_a^b t^n w(t)\mathrm{d}t<\infty$, $(\forall n\geqslant 0)$. $\|f\|_{2,\omega}=\left(\int_a^b|f(t)|^2 w(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2}$. $P_n(x)$ 为 n 阶复系数多项式,令

$$C_n^{(k)}=\sup\left\{\frac{\|P_n^{(k)}\|_{2,\omega}}{\|P_n\|_{2,\omega}}:P_n\right\},\text{则}$$

(1) $$\frac{1}{n-k+1}\sum_{j=1}^{n-k}\binom{n-j}{k}^2\leqslant(C_n^{(k)})^2\leqslant\sum_{j=0}^{n-k}(j+1)\binom{n-j-1}{k-1}^2;$$

(2) $$\frac{1}{k!\sqrt{2k+1}}\leqslant\liminf_{n\to\infty}\frac{C_n^{(k)}}{n^k}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{C_n^{(k)}}{n^k}\leqslant\frac{1}{(k-1)!\sqrt{2k(2k-1)}}.$$

见 Monatsh Math. 1990,109(2):223－122.

21. 设 f 在 $[a,b]$ 上存在 $n+1$ 阶导数, $f^{(k)}(a)=0$, $0\leqslant k\leqslant n$, $f(b)=0$,则 $\exists c\in(a,b)$,使得

$$f^{(n+1)}(c)\geqslant f(c).$$

提示:用反证法,若 $\forall x\in(a,b)$. $f^{(n+1)}(x)<f(x)$. 用数学归纳法可证

$$f(x)\leqslant\frac{M(x-a)^{k(n+1)}}{(k(n+1))!},a<x<b.\quad(\text{见[305]1989,96(8):740})$$

22. **Picone 不等式**:设 f 是以 $2T$ 为周期的函数,而且有 $m+n+1$ 阶连续导数,则

$$\|f^{(n)}\|_c\leqslant 2T\left(\frac{T}{\pi}\right)^m\|f^{(m+n+1)}\|_c.$$

(见 Boll. Un. Mat. Ital, 1927,6:251－253)

23. **Boas 不等式**:设 $f^{(n)}(x)\geqslant c>0$, $x\in[a,b]$,则

$$\|f\|_{\infty}\geqslant\frac{2c}{n!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^n.$$

(见[305]1971,78:1085－1093)

24. 设 f 在 $[0,1]$ 上有二阶导数且 $f(0)=f(1)=0$,若 $\max\{f(x):x\in[0,1]\}=2$,则 $\min\{f(x):x\in[0,1]\}\leqslant-16$,若 $\min\{f(x):x\in[0,1]\}=-1$,则存在 $\xi:0<\xi<1$,使得 $f''(\xi)\leqslant 1/8$.

25. [MCU] 设 f 在区间 $[0,1]$ 上二次可微,且 $f(0)=f(1)=0$,以及

$$\min\{f(x):0\leqslant x\leqslant 1\}=-1,\quad\text{则}\quad\max\{f''(x):0\leqslant x\leqslant 1\}\geqslant 8.$$

证 用 Taylor 公式:设 x_0 为 f 的极小值点,且 $0<x_0<1$,则 $f'(x_0)=0$, $f(x_0)=-1$,于是

$$f(x)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2.$$

分别令 $x = 0, x = 1$,相应的 $f''(\xi)$ 分别 $f''(\xi_0), f''(\xi_1)$,则

$$f''(\xi_0) = \frac{2}{x_0^2}, f''(\xi_1) = \frac{2}{(1-x_0)^2},$$

所以,当 $x_0 < 1/2$ 时,$f''(\xi_0) \geqslant 8$,而当 $x_0 > 1/2$ 时,$f''(\xi_1) \geqslant 8$,从而不等式得证.

26. 设在区间 $[0,a]$ 上,$|f''(x)| \leqslant M$,且 f 在开区间 $(0,a)$ 内取得最大值,则

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Ma.$$

证 设 f 在 $x_0 \in (0,a)$ 取得最大值,则 $f'(x_0) = 0$,对于 f' 用微分中值定理,得

$$|f'(0)| = |0 - f''(\xi_1)x_0| \leqslant Mx_0;$$

$$|f'(0)| = |0 + f''(\xi_2)(a - x_0)| \leqslant M(a - x_0).$$

两式相加即可得证.

27. 设 $G = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,$f$ 在 G 上的四阶导数有界:

$|f^{(4)}(x)| \leqslant M$,则 $\forall x \in G - \{x_0\}$,有

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x) - 2f(x_0) + f(x_1)}{(x - x_0)^2} \right| \leqslant (M/12)(x - x_0)^2,$$

式中 x_1 与 x 关于点 x_0 对称.

28. **数值微分不等式**:设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上光滑函数,$T = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1\}$,对于给定的插值 y_k 和 $\delta > 0$,满足 $|f(x_k) - y_k| \leqslant \delta$. $f(x_0) = y_0, f(x_n) = f(1) = y_n$. 若光滑函数 g 满足 $g(0) = f(0), g(1) = f(1)$,且

$$\left(\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(y_k - g(x_k))^2\right)^{1/2} < \delta,$$

则取极小化元 g_* 的导数 g'_* 作为 $f'(x)$ 的逼近. 若 $f'' \in L(0,1)$,则

$$\| g'_* - f' \|_2 \leqslant \sqrt{8}\left(h \| f'' \|_2 + \sqrt{\delta} \| f'' \|_2^{1/2}\right).$$

式中 $h = x_k - x_{k-1}$,g_* 实际上是在 T 上的三次自然样条. 见[305]2001,108(6):512-521.

29. 设导数 f' 严格递增,则

$$f'(x) < f(x+1) - f(x) < f'(x+1).$$

提示:利用微分中值定理:$f(x+1) - f(x) = f'(x+\theta), 0 < \theta < 1$.

30. 设三阶导数 $f^{(3)}$ 在 (a,b) 内严格递增,$a + 1 < b - 1$,则

$$f''(x) < f(x-1) + f(x+1) - 2f(x), \quad x \in (a+1, b-1).$$

特别,当 $f(x) = x\ln x$. $x > 1$ 时,$(x-1)\ln(x-1) + (x+1)\ln(x+1) - 2x\ln x > 1/x$.

31. 设非线性函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内可导,则 $\exists \xi \in (a,b)$,使得

$$|f'(\xi)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

若加条件 $f(a) = 0$,则 $|f'(\xi)| > \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f$.

32. [MCU]. 设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上二次可导,且 $f'(a) = f'(b) = 0$,则 $\exists \xi \in (a, b)$,使得

$$|f''(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

提示:利用微分中值定理,或 Taylor 公式.

33.　设 $f\in C[a,b]$,右导数 f'_+ 在半开区间 $[a,b)$ 上存在,则当 $f(b)>f(a)$ 时,$\exists\xi\in[a,b)$,使得

$$f'_+(\xi)\geqslant\frac{f(b)-f(a)}{2(b-a)}.$$

当 $f(b)<f(a)$ 时,不等号反向.

提示:考虑辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{2(b-a)}(x-a).$$

34.　设 f 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微,则

(1)　$\|f'\|_c\leqslant 9\int_0^1|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x$;

(2)　设 $0<a<1/3$,　$2/3<b<1$,则

$$\|f'\|_c\leqslant 3|f(b)-f(a)|+\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

35.　若 $f\in C^2[0,\infty)$,则

$$\int_0^\infty\{|f(x)|+|f''(x)|\}\mathrm{d}x\geqslant\sqrt{2}|f(0)|.$$

式中 $\sqrt{2}$ 是最佳常数,见[21]P544.

36.　设 $f\in C[a,b]$,$f\in{}'C[a,b]$,则

(1)　$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b|f|+\frac{1}{2}\int_0^1|f'|$.

(2)　$\|f\|_c\leqslant\frac{1}{b-a}\int_0^1|f|+\int_0^1|f'|$.

([21]P.565)

37.　设 $f'\in C[0,1]$,$f(0)=f(1)=0$,则

$$\|f^2\|_\infty\leqslant\left(\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{1}{2}\right)\int_0^1(|f|^2+|f'|^2).$$

式中 $\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{1}{2}$ 是最佳常数.(见[21]P.547－548)

38.　设 f,g 是 $[1,\infty)$ 上正的递增函数,使得

$$\frac{f''(x)}{f(x)}\geqslant\frac{g''(x)}{g(x)},$$

则

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\geqslant\frac{g'(x)}{g(x)}-\left|\frac{f'(1)}{f(1)}-\frac{g'(1)}{g(1)}\right|.$$

(证明见[21].551)

39.　设 $p,q\in C(0,\infty)$,使得 $p(x)>0$,$(p(x)q(x))'=0$.f,g 是微分方程 $(p(x)y')'+q(x)y=0$ 的线性无关实解,若 $x_2>x_1>0$,$f(x_1)=f(x_2)=0$.则

$$|g(x_1)|\geqslant|g(x_2)|>0$$

(证明见[21]P.554 - 555)

40. 设 $f\in AC[0,2\pi]$, $f'\in L^p(0,2\pi]$, $1<p\leqslant 2$. 若 $\exists\, n>1$, 使 f 的 Fourier 系数头 $n-1$ 项为零, 即 $a_k=0, 0\leqslant k\leqslant n-1$, $b_k=0, 1\leqslant k\leqslant n-1$, $1/p+1/q=1$, 则

$$|f(x)|\leqslant\left(\frac{q}{\pi}\right)^{1/p}\cdot n^{1/q}\|f'\|_p.$$

(Luxemburg, W. A. J., Nieuw Arch. Wisk., 1973, 21(3): 108 - 109.). Jagers, A. A. 改进为

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2^{1/p}n^{1/q}}\|f'\|_p.$$

见[21]P540.

41. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导, $f'(x)\neq 0$, $\dfrac{f''(x)}{f'(x)}$ 在 $[a,b]$ 上递减, 则

$$|f(x)-f(b)|\geqslant|a-b|[f'(a)f'(b)]^{1/2},$$

([21]P.536)

42. 设 $f\in AC[0,2\pi]$, $f'\in L^2(0,2\pi)$, 则

$$|f(x)^2-f(y)^2|\leqslant 2\pi\left(\int_0^{2\pi}f^2\right)\left(\int_0^{2\pi}(f')^2\right).$$

(Warschawski, S. E. [393] 1945, 3; 12 - 28)

若 $f'\in L^q[0.2\pi]$, $q>1$, $\exists\, y\in[0,2\pi]$, $f(y)=0.1/p+1/q=1$, $a>1$, 则

$$|f(x)|^a\leqslant\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}|f(t)|^{a-1}|f'(t)\mathrm{d}t|\leqslant\frac{a}{2}\|f^{(a-1)}\|_p\|f'\|_q.$$

特别当 $a=p=q=2$, 则

$$\|f\|_\infty\leqslant\sqrt{2\pi}\|f\|_2\|f'\|_2.$$

([21]P.537 - 538)

43. 设 f 在 $[0,\infty)$ 上非负递减且局部绝对连续, 若 $p>0$, $|b|\leqslant a$, $x\geqslant a+b$, 则

$$f(x)\leqslant\left(\frac{a+b+px}{(a+b)(1+p)}\right)^{-1/p}.$$

更一般的上界见[331]1996, 7: 55 - 67.

44. 设 $M(f,x)=\sup\limits_{t>0}\dfrac{1}{2t}\displaystyle\int_{x-t}^{x+t}|f(y)|\,\mathrm{d}y$, 则

$$|f'(x)|^2\leqslant 8M(f,x)M(f'',x).$$

(见 Mazya, Vladimir 等, Math, Bohem 1999, 124(2 - 3): 131 - 148)

45. 设 $f, f^{(k)}, f^{(n)}\in L^2(R^1)$, $1\leqslant k<n$, $h>0$, $\Delta_h(f,x)=f(x+\frac{h}{2})-f(x-\frac{h}{2})$, 则

$$\|f^{(k)}\|_2\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{n}\right)h^{-k}\|\Delta_{\pi h}(f)\|_2+\frac{k}{n}h^{n-k}\|f^{(n)}\|_2.$$

(Taikov, L. V., [405], 1991, 50(4): 114 - 122)

46. **Taylor 公式余项估计:**

(1) 设 $f^{(n)}\in AC[a,b]$, $x\in[a,b]$.

$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(a)}{x-a}+G_n(f;a,x)$,则

$|G_n(f;a,x)|\leqslant\frac{1}{4}\frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\left[\sup_{t\in[a,x]}f^{(n+1)}(t)-\inf_{t\in[a,x]}f^{(n+1)}(t)\right]$

(Dragomir, S. S., [303]1999, 2(2): 183 - 193)

(2) Taylor 公式余项的积分形式:

$R_n(f;a,x)=\frac{1}{n!}\int_a^x(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$,则

$$R_n(f;a,x)\leqslant\begin{cases}\dfrac{|x-a|^n}{n!}\|f^{(n+1)}\|_1, & p=1, f^{(n+1)}\in L^1[a,b],\\ \dfrac{|x-a|^{n+(1/q)}}{n!(nq+1)^{1/q}}\|f^{(n+1)}\|_p, & 1<p<\infty, \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1, f^{(n+1)}\in L^p[a,b],\\ \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty, & f^{(n+1)}\in L^\infty[a,b].\end{cases}$$

(Anastassiou, G. A. 等[301]2001, 263(1)). 提示:用 Hölder 不等式.

(3) 设 $R_n(x)$ 是 f 的 Marclaurin 展开式的余项: $R_n(f)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. 若 f 有对数凸导数,则

$$\frac{R_{n-1}(x)R_{n+1}(x)}{[R_n(x)]^2}\geqslant\frac{f^{(n)}(0)f^{(n+2)}(0)}{[f^{(n+1)}(0)]^2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right).$$

(Merkle, M. J. 等. [360]1996, 66(3): 194 - 196)

47. [MCU]. 设 f 的三阶导数 $f^{(3)}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续且 $\forall\in R^1, f^{(k)}(x)>0$, $k=0,1,2,3$, 若 $f^{(3)}(x)\leqslant f(x)$,则 $f'(x)<2f(x)$, $\forall x\in R^1$.

(1994 年第 60 届 Putnam 数学竞赛试题)

证 1 $\forall c\in R^1$,令 $g(x)=f(x)-f'(x)(x-c)+\frac{1}{2}f''(x)(x-c)^2$.

$$\forall y>0, g(c+y)>g(c-y)>\frac{1}{2}y^2f''(c-y).$$

由微分中值定理, $\exists\xi\in(c-y,c+y)$,使得

$$f''(c+y)-f''(c-y)=2yf^{(3)}(\xi)\leqslant 2yf(\xi)<2yf(c+y).$$

$$\therefore\qquad f(c+y)-f'(c+y)y+f(c+y)y^3>0.$$

取 $y=1$,即得 $f'(c+1)<2f(c+1)$.

令 $x=c+1$,(因为 c 是任取的)得 $f'(x)<2f(x)$.

证 2 从 $f^{(k)}>0$ 和 $f^{(3)}(x)\leqslant f(x)\Rightarrow f''(x)f^{(3)}(x)\leqslant f''(x)f(x)<f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$. 将它从 a 到 x 积分,再令 $a\to-\infty$,得 $[f''(x)]^2\leqslant 2f(x)f'(x)$. 又由 $f^{(3)}(x)\leqslant f(x)$,得到 $[f''(x)]^2f^{(3)}(x)\leqslant 2[f(x)]^2f'(x)$. 将它从 a 到 x 积分,再令 $a\to-\infty$,得出

$f''(x)\leqslant\sqrt[3]{2}f(x)f'(x)$,两边乘上 $f'(x)$,再次使用积分并取极限这一技巧,即得 $f'(x)\leqslant\sqrt[6]{2}f(x)<2f(x)$.

见[305]2000, 107: 721 - 732. 我们问:如何从 $f^{(n)}(x)\leqslant f(x)$ 推出类似的不等式?

48. **Chaplygin 不等式**:设 $y(x)$ 是 Canchy 问题 $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0, (x,y) \in D = \{(x,y): |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ 的解,并设曲线 $\begin{cases} y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$ 全部位于 D 内,且通过点 (x_0,y_0),对 $x > x_0$ 满足不等式 $g'(x) - f(x,g(x)) < 0, h'(x) - f(x,h(x)) > 0$,则

$$g(x) < y(x) < h(x), x > x_0. \tag{3.47}$$

若选取满足(3.47)的初始近似 $g_0(x), h_0(x)$,根据上述不等式可以构造出一对更好的近似 $g_1(x), h_1(x)$,满足

$$g_0(x) < g_1(x) < y(x) < h_1(x) < h_0(x).$$

由此可构造出 $\{g_n\}$ 与 $\{h_n\}$,满足:

$$g_{n-1}(x) < g_n(x) < y(x) < h_n(x) < h_{n-1}(x),$$

$$h_n(x) - g_n(x) \leqslant \frac{c}{2^{2^n}}.$$

式中常数 c 与 x, n 无关.这是近似求解一阶常微分方程初值问题(Cauchy 问题)的有效方法.

参考:Collatz, L., The numerical treatment of differential equations, Springer, 1966.

49. 设 $f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-a} - (1-x)^{-a}), & 0 < x < 1, a > 0, \text{则} \\ 0, & x = 0,1. \end{cases}$

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant cn^{n(1+(1/a))}, 0 \leqslant x \leqslant 1$$

式中常数 c 与 a, n 有关, $n = 0,1,2,\cdots$,见[4]P485.

50. 设 $f(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}. g(x) = x^{-\alpha}e^x. \alpha, \beta > 0$,则当 $-1 < x < 1$ 时, $f^{(2n)}(x) > 0$,而当 $x > 0$ 时, $g^{(2n)}(x) > 0, n = 0,1,2,\cdots$

见[391]1984,44(3-4):351-353.

51. 设 $f(x) = \dfrac{e^{ix}}{e^{ix} - a}$, t 为实数, a 为复数. $|a| \neq 1$,则 f 无穷次可微,且

当 $|e^{ix} - a| < 1$ 时, $|f^{(n)}(x)| \leqslant 2^n n! |e^{ix} - a|^{-n}$;

当 $|e^{ix} - a| \geqslant 1$ 时, $|f^{(n)}(x)| \leqslant 2^n \cdot n!$

(Yabuta, K., Tôhoku Math. J. 1973, 25:89-102)

52. 设 $x > a$ 时, $|f^{(n)}(x)| \leqslant |g^{(n)}(x)|$,若 $\exists m < n, y_n \to \infty (n \to \infty)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(y_n)}{y_n^m} = c_1, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{g(y_n)}{y_n^m} = c_2$ 存在.令 $F(x) = \prod\limits_{k=0}^{n}(x - x_k), G(f; x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f(x_k)}{F'(x_k)}$,则当 $\forall x_k > a$ 时

$$|G(f; x_0, x_1, \cdots, x_m) - c_1| \leqslant |G(g; x_0, x_1, \cdots x_m) - c_2|.$$

见[21]P.540-541.

53. 设 f 由下式定义:

$$xf(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{k-1}}{k!}(xe^{-x})^k,x>1.$$则对 $n=0,1,2,3,4$,成立$(-1)^n f^{(n)}(x)\geqslant 0$.

1970年出版的[4]$P.498$指出 $n>4$ 时,上式不成立,但1972年Askey和Boas指出仍未证明.

54. 设 $f(x)=\sqrt{x^2-1},x>1$,则当 n 为奇数时,$f^{(n)}(x)>0$;而当 n 为偶数时,$f^{(n)}(x)<0$.

提示:$f^{(n)}(x)=g_n(x)(x^2-1)^{-(n-\frac{1}{2})}$,其中 g_n 为 $n-2$ 次多项式,当 n 为奇数时,g_n 为奇函数且它的一切系数都是非负数;而当 n 为偶数时,g_n 为偶函数,且它的一切系数非正(详见[152]$P55$).

55. $f_0(x)=\dfrac{1}{1-x},f_{n+1}(x)=xf'_n(x)$,

则当 $0<x<1$ 时,$f_{n+1}(x)>0$.(见[152]P.57)

56. 设 $f(x)=e^{-x^2}P_n(x)$,式中 $P_n(x)$ 为 n 阶实多项式.若 $|f(x)|\leqslant M,x\in R^1$,则

(1) $|f'(x)<(1+\varepsilon(x))4e|x|M,x\in R^1$.式中 $\lim\limits_{|x|\to\infty}\varepsilon(x)=0$.

(2) $|f'(x)|<[1+\varepsilon(n)]\times 1.095|\sqrt{n}M$,式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon(n)=0$.

(Milne, W. E., [309]1931, 33:143 - 146.[21]P.526)

57. 设 f 是二次可微的实值函数,且满足

$$f(x)+f''(x)=-xg(x)f'(x),\text{其中 } g(x)\geqslant 0,\forall x\in R^1,$$

则 $[f(x)]^2+(f'(x)]^2\leqslant(f(0)]^2+[f'10)]^2$.

这表示 $|f(x)|$ 有界.

(1997年第58届Putman竞赛,见[305]1998,105:744 - 755).