§ 2　Hölder 不等式和 Minkowski 不等式

著名的 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式最初是用数列形式给出的,后由 Riesz,F. 将其推广到积分形式,成为建立 L^p 空间理论的基本工具.而且在许多领域都是最常用的基本不等式.

一、Hölder 不等式的基本形式

(一)　Hölder 不等式的基本形式

1889 年 Hölder 证明:设 $a_k, b_k \geqslant 0, k = 1,2,\cdots,n, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,若 $p>1$,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.1}$$

若 $0 < p < 1$，则(2.1)式中不等号反向，仅当 $\{a_k\}$ 或 $\{b_k\}$ 为零数列，或存在两个不同时为零的非负常数 c_1, c_2，使得 $c_1 a_k^p = c_2 b_k^q, k = 1,2,\cdots,n$，(2.1)式中等号成立.

注　Roger 比 Hölder 早一年即 1888 年得出(2.1)式，因此，1998 年 M. Lech 提出(2.1)式应称为 Roger 不等式或至少应称为 Roger-Hölder 不等式，(见[303])1998，1(1)：69－83). 但本书仍按惯例称为 Hölder 不等式.

1.　**Hölder 不等式的离散形式(有限和或无穷和)**：设 $a = \{a_1,\cdots,a_n\}$ 或 $a = \{a_1,\cdots,a_n,\cdots\}$ 为实数或复数列，令

$$\| a \|_p = \begin{cases} \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p}, 0 < p < \infty, \\ \sup_k |a_k|, \qquad p = \infty, \end{cases} \tag{2.2}$$

满足条件 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的 p, q 称为共轭指数，当 $p = 1$ 时规定 $q = \infty$. 若 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，则

$$\| ab \|_1 \leqslant \| a \|_p \| b \|_q, \tag{2.3}$$

即

$$\sum_k |a_k b_k| \leqslant \begin{cases} \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_k |b_k|^q\right)^{1/q}, 1 < p < \infty, \\ \left(\sum_k |a_k|\right)\left(\sup_k |b_k|\right), \qquad p = 1, \\ \left(\sup_k |a_k|\right)\left(\sum_k |b_k|\right), \qquad p = \infty. \end{cases} \tag{2.4}$$

若 $0 < p < 1$，则上述不等号反向，仅当存在实数 θ 和不全为零的非负实数 c_1, c_2，使得对所有的 $k, c_1 |a_k|^p = c_2 |b_k|^q$　(即 $|b_k| = c|a_k|^{p-1}, c > 0$)，而且 $\arg(a_k b_k) = \theta$ 时等号成立.

注　若 $p < 0$(这时要求所有 $a_k \neq 0$)，则 $0 < q < 1$，于是，将 p, q 互换，a, b 互换，又归结为 $0 < p < 1$ 的情形.

当 $p = q = 2$ 时，(2.4)式称为 Cauchy 不等式(或 Schwarz 不等式，Cauchy-Schwarz 不等式，或 Bunyakovskii 不等式).

Hölder 不等式的逆命题：设 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, B > 0$，则对所有满足

$$\| a \|_p = \left(\sum_k |a_k|^p\right)^{1/p} \leqslant A \tag{2.5}$$

的 $a = \{a_k\}$，成立

$$\| ab \|_1 = \sum_k |a_k b_k| \leqslant AB$$

的充要条件是 $\| b \|_q = \left(\sum_k |b_k|^q\right)^{1/q} \leqslant B$.

(2.3)式可推广为：设 $a_{jk} > 0$，且 $r > 0, p_j > 0, \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \geqslant \frac{1}{r}$，　则

$$\left(\sum_k \prod_{j=1}^m a_{jk}^{1/p_j}\right)^{1/r} \leqslant \prod_{j=1}^m \left(\sum_k a_{jk}^{1/r}\right)^{1/p_j}, \tag{2.6}$$

仅当 $\sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} = \frac{1}{r}$ 且矩阵 (a_{jk}) 的列向量成比例时等号成立. (2.3) 式还可推广为加权形式:设 $1 < p_j < \infty, \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j} = 1, \omega_k > 0$,则

$$\sum_k \left(\omega_k \prod_{j=1}^m |a_{jk}|\right) \leqslant \prod_{j=1}^m \left(\sum_k \omega_k |a_{jk}|^{p_j}\right)^{1/p_j}. \tag{2.7}$$

2. **Hölder 不等式的积分形式**:设 p, q 为共轭指数,即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 令

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, 0 < p < \infty, \tag{2.8}$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{x\in E} |f(x)| = \inf_{\mu(A)=0} \{\sup_{x\in E-A} |f(x)|\}. \tag{2.9}$$

若 $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$,则当 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时, $fg \in L^1(E)$,且

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2.10}$$

即

$$\int_E |f(x)g(x)| \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}x\right)^{1/q}, 1 < p < \infty; \tag{2.11}$$

$$\int_E |f(x)g(x)| \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f(x)| \mathrm{d}x\right)\left(\operatorname*{esssup}_{x\in E} |g(x)|\right), \ p = 1, \tag{2.12}$$

若 $0 < p < 1$,则上述不等号反向,仅当存在实数 β 和不全为零的实数 c_1, c_2,使得

$$c_1 |f(x)|^p = c_2 |g(x)|^q \text{ 和 } \arg(f(x)g(x)) = \beta \tag{2.13}$$

在 E 上几乎处处成立时等号成立.

特别当 $p = q = 2$ 时,

$$\int_E |f(x)g(x)| \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_E |g(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \tag{2.14}$$

称为 **Cauchy 不等式**(或与(12.4)式类似称为 **Schwarz 不等式**等).

将(2.9)式中 $\|f\|_p$ 换成加权范数:

$$\|f\|_{p,\omega} = \left(\int_E |f(x)|^p \omega(x) \mathrm{d}x\right)^{1/p}, 1 < p < \infty \tag{2.15}$$

式中 $\omega(x)$ 在 E 上几乎处处大于零,称为**权函数**,则

$$\|fg\|_{1,\omega} \leqslant \|f\|_{p,\omega}, \|g\|_{q,\omega} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty), \tag{2.16}$$

即

$$\int_E |f(x)g(x)| \omega(x) \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \omega(x) \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E |f(x)|^q \omega(x) \mathrm{d}x\right)^{1/q} \tag{2.17}$$

$(1 < p < \infty)$ 称为**加权 Hölder 不等式**.

3. 利用抽象测度空间 $(X, \sum, \mu)$ 上的积分,可以统一处理上述离散量求和的形式

和连续量的积分形式:设 $E \in \sum$,令

$$\|f\|_{p,\omega} = (\int_E |f|^p \omega \mathrm{d}\mu)^{1/p}, 0 < p < \infty. \tag{2.18}$$

$$\|f\|_{\infty,\omega} = \inf_{\mu(A)=0} \{\sup_{x \in E-A} |f(x)| \omega(x)\}.$$ 则

$$\|fg\|_{1,\omega} \leqslant \|f\|_{p,\omega} \|g\|_{q,\omega} \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{2.19}$$

特别当 $1 < p < \infty$ 时,有

$$\int_E |fg| \omega \mathrm{d}\mu \leqslant (\int_E |f|^p \omega \mathrm{d}\mu)^{1/p} (\int_E |g|^q \omega \mathrm{d}\mu)^{1/q}.$$

Hölder 不等式的逆命题:设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$,$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,$f$ 在 E 上可测,则

$$\|f\|_{p,\omega} = \sup\{|\int_E fg\omega \mathrm{d}\mu| : \|g\|_{q,\omega} \leqslant 1\}; \tag{2.20}$$

若 μ 是半定的(特别是 σ 有限的),则还成立

$$\|f\|_{\infty,\omega} = \sup\{|\int_E fg\omega \mathrm{d}\mu| : \|g\|_{1,\omega} \leqslant 1\}. \tag{2.21}$$

(2.19)式还有以下有用的变形:设 E 上的可测函数 f 满足:对所有在 E 上可积的简单函数 g,都成立

$$\int_E |fg| \omega \leqslant C \|g\|_{q,\omega}. \tag{2.22}$$

则当 μ 为半定(特别是 σ 有限)时,$f \in L^p_\omega(E)$ 且 $\|f\|_{p,\omega} \leqslant C$.

注　设 $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$,$E_k \in \sum$,$\mu(E_k) < \infty$,则称 μ 是 σ 有限的;若对所有 $A \in \sum$,$\mu(A) < \infty$,都存在 $B \in \sum$,使得 $B \subset A$,且 $0 < \mu(B) < \infty$,则称 μ 为半定的,每个 σ 有限测度都是半定的,但其逆不成立.在本书中,对于 $\|f\|_\infty$ 的情形,我们假设 μ 是半定的(或 σ 有限的).

(2.19)式可推广为:设 $1 < p_k < \infty$,$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k} = 1$,$f_k \in L^{p_k}_\omega(E)$,则 $\prod_{k=1}^{m} f_k \in L^1_\omega(E)$,且

$$\int_E |\prod_{k=1}^{m} f_k| \omega \mathrm{d}\mu \leqslant \prod_{k=1}^{m} (\int_E |f_k|^{p_k} \omega \mathrm{d}\mu)^{1/p_k}. \tag{2.23}$$

4.　关于泛函的广义 **Hölder 不等式**:设 X 为任一集合,$x: X \to R^1_+$,$x(t) > 0$,$t \in X$,泛函 f 满足:

1)　$f(0) = 0$;

2)　$\forall \lambda > 0, f(\lambda x) = \lambda f(x)$;

3)　若 $0 < x(t) \leqslant y(t)$,则 $f(x) \leqslant f(y)$;

4)　$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$,式中 $x(t), y(t) > 0$.

$1 < p_k < \infty$,$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{p_k} = 1$,则

$$f(|\prod_{k=1}^{m} x_k|) \leqslant \prod_{k=1}^{m} [f(|x_k|^{p_k})]^{1/p_k}. \tag{2.24}$$

5. 1986 年邱福成将 Hölder 不等式推广到正线性算子上去，称为线性算子的广义 Hölder 不等式：

设 $T: L[a,b] \to L[a,b]$ 为正线性算子，$-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$，$f \in L^p[a,b]$，$g \in L^q[a,b]$，$1 \leqslant p < \infty$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则对 $[a,b]$ 中几乎所有的 x，成立

$$T(|fg|, x) \leqslant [T(|f|^p, x)]^{1/p}[T(|g|^q, x)]^{1/q}, 1 < p < \infty;$$

$$T(|fg|, x) \leqslant T(|f|, x) \operatorname*{esssup}_x |g(x)|, p = 1.$$

证明见[339]1985,5(3):55 - 58.

(二) Hölder 不等式基本形式的典型证明方法

Hölder 不等式基本形式的证明，可以在实分析与泛函分析的许多著作中找到，如[58]，[64]，[98] 等，下面对(2.19) 式与(2.20) 式给出一个简洁的证明.

引理 2.1 设 $a, b \geqslant 0$，$0 < \lambda < 1$，则成立 **Young 不等式：**

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leqslant \lambda a + (1-\lambda) b. \tag{2.25}$$

仅当 $a = b$ 时等号成立.

证 若 $b = 0$，则(2.25) 式成立，若 $b > 0$，令 $t = a/b$，则(2.25) 式归结为

$$t^\lambda \leqslant \lambda t + (1-\lambda). \tag{2.26}$$

令 $f(t) = t^\lambda - \lambda t$，则 $t < 1$ 时 f 严格递增，$t > 1$ 时 f 严格递减，所以，$f(t) \leqslant f(1) = 1 - \lambda$. 此即(2.26) 式.

(2.19) 式的证明：不妨设 $\|f\|_{p,\omega} = \|g\|_{q,\omega} = 1$.（否则 f, g 可分别用 $\frac{f}{\|f\|_{p,\omega}}$，$\frac{g}{\|g\|_{q,\omega}}$ 代替.）. 在(2.25) 式中令 $\lambda = \frac{1}{p}$，$a = |f(x)|^p$，$b = |g(x)|^q$，则

$$|fg| \leqslant \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q.$$

两边乘以 $\omega > 0$ a.e. 并且在 E 上积分得到

$$\int_E |fg| \omega \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{p}\int_E |f|^p \omega \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\int_E |g|^q \omega \mathrm{d}\mu = \frac{1}{p}\|f\|_{p,\omega}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{q,\omega}^q =$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega}$. 仅当 $|f|^p = |g|^q$ a.e. 于 E 时等号成立. 对于(2.19) 式中等号仅当满足(2.13) 式时成立.

(2.20) 式的证明：若 $f = 0$ a.e. 于 E，则(2.20) 式成立.

下面设 $\|f\|_{p,\omega} \neq 0$. 若 $1 \leqslant p < \infty$，则由 Hölder 不等式(2.19) 式，有

$\left|\int_E fg\omega \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \|f\|_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega}$，从而

$$\sup\left\{\left|\int_E fg\omega \mathrm{d}\mu\right| : \|g\|_{q,\omega} \leqslant 1\right\} \leqslant \|f\|_{p,\omega}. \tag{2.27}$$

为证反向不等式. 取 $g = \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_{p,\omega}^{p-1}}(\operatorname{sgn} f)$，则 $\|g\|_{q,\omega} = 1$，且

$$\int_E fg\omega \mathrm{d}\mu = \int_E \frac{|f|^{p-1}}{\|f\|_{p,\omega}^{p-1}}(\operatorname{sgn} f) f\omega \mathrm{d}\mu = \|f\|_{p,\omega}. \tag{2.28}$$

所以(2.20)式成立.

当 $p=\infty$ 时,对于 $\|g\|_{q,\omega}\leqslant 1$,由 Hölder 不等式(2.19),有

$$\left|\int_E fg\omega\mathrm{d}\mu\right|\leqslant\|f\|_{\infty,\omega}\|g\|_{1,\omega}\leqslant\|f\|_{\infty,\omega}. \tag{2.29}$$

另一方面,由 μ 的半定性,$\forall\varepsilon>0,\exists A\in\sum$,使得

$$|f|>\|f\|_{\infty,\omega}-\varepsilon\quad\text{a.e. 于 }A,\text{且 }0<\mu(A)<\infty.$$

取 $g=\dfrac{1}{\omega(A)}(\operatorname{sgn}f)\varphi_A$,式中 φ_A 为 A 的特征函数,$\omega(A)=\int_A\omega\mathrm{d}\mu$.

则 $\|g\|_{1,\omega}=1$,且

$$\int_E fg\omega\mathrm{d}\mu=\frac{1}{\omega(A)}\int_A f(\operatorname{sng}f)\omega\mathrm{d}\mu\geqslant\|f\|_{\infty,\omega}-\varepsilon.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性,知(2.21)式成立.

利用加权 AG 不等式:设 $a_k\geqslant 0,p_k>0,\sum_{k=1}^m p_k=1$. 则

$$\prod_{k=1}^m a_k^{p_k}\leqslant\sum_{k=1}^m p_k a_k. \tag{2.30}$$

可类似地证明(2.23)式.

二、 Minkowski 不等式的基本形式

1. **Minkowski 不等式的离散形式(有限和或无穷和)**(1896):设 $a=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 或 $a=\{a_1,\cdots,a_n,\cdots\}$ 是实数或复数列,$\|a\|_p$ 仍按(2.2)式定义.则当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时,有

$$\|a+b\|_p\leqslant\|a\|_p+\|b\|_p. \tag{2.31}$$

即:$\left(\sum_k|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_k|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_k|b_k|^p\right)^{1/p},1\leqslant p<\infty$,

$\sup_k|a_k+b_k|\leqslant\sup_k|a_k|+\sup_k|b_k|,\ p=\infty$.

当 $p<1\ (p\neq 0)$ 时不等号反向.当 $p<0$ 时,要求所有 a_k,b_k 和 a_k+b_k 均不为零.当 $p\neq 0,1$ 时,仅当存在不全为零的非负实数 c_1,c_2,使得 $\forall k,c_1a_k=c_2b_k$ 时等号成立;当 $p=1$ 时,(2.31)式中仅当 $\forall k,\arg a_k=\arg b_k$ 时等号成立.

(2.31)式可推广为:设 $a_j=\{a_{j1},\cdots,a_{jk},\cdots\},1\leqslant j\leqslant m$,则

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^m a_j\right)\right\|_p\leqslant\sum_{j=1}^m\|a_j\|_p,1\leqslant p\leqslant\infty. \tag{2.32}$$

即当 $1\leqslant p<\infty$ 时,有

$$\left[\sum_k\left(\sum_{j=1}^m|a_{jk}|^p\right)\right]^{1/p}\leqslant\sum_{j=1}^m\left(\sum_k|a_{jk}|^p\right)^{1/p}. \tag{2.33}$$

注 在(2.31)式中,将 p 换成 $1/p$,得到常用的另一形式:

当 $1\leqslant p<\infty$ 时,有

$$\left(\sum_k|a_k+b_k|^{1/p}\right)^p\geqslant\left(\sum_k|a_k|^{1/p}\right)^p+\sum_k\left(|b_k|^{1/p}\right)^p; \tag{2.34}$$

而当 $0<p<1$ 时,不等号反向,即

$$(\sum_k |a_k+b_k|^{1/p})^p \leqslant (\sum_k |a_k|^{1/p})^p + \sum_k |b_k|^{1/p})^p. \tag{2.35}$$

(2.33) 式还可推广为加权形式：设 $p_j, q_k > 0, 1 < p < \infty$，则

$$\{\sum_{k=1}^{\infty} q_k(\sum_{j=1}^{\infty} p_j |a_{jk}|)^p\}^{1/p} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} p_j(\sum_{k=1}^{\infty} q_k |a_{jk}|^p)^{1/p}. \tag{2.36}$$

注 (2.31)、(2.33) 式中关于求和号 $\sum$ 是齐次的，因而它们有关于各种平均的类似. 例如，设 $g(x) = \log x, M_g(a_k) = g^{-1}(\sum_k g(a_k))$，则

$$M_g(\frac{a_k+b_k}{2}) \leqslant \frac{1}{2}M_g(a_k) + \frac{1}{2}M_g(b_k). \tag{2.37}$$

2. **Minkowski 不等式的积分形式**：设 $f, g \in L^p(E), 1 \leqslant p \leqslant \infty$，则 $f+g \in L^p(E)$，且

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{2.38}$$

即当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，有

$$(\int_E |f+g|^p dx)^{1/p} \leqslant (\int_E |f|^p dx)^{1/p} + (\int_E |g|^p dx)^{1/p}. \tag{2.39}$$

当 $0 < p < 1$ 时，上述不等号反向. (2.38) 式中等号成立的充要条件：当 $p > 1$ 时是存在不全为零的非负实数 c_1, c_2，使得

$$c_1 f(x) = c_2 g(x) \quad \text{a.e. 于 } E;$$

而当 $p = 1$ 是 $\arg f(x) = \arg g(x)$ a.e. 于 E. 或存在非负可测函数 h，使得 $fh = g$ a.e. 于集 $A = \{x : f(x)g(x) \neq 0\}$.

3. 利用抽象测度空间 $(X, \sum, \mu)$ 上的积分，可以统一处理上述离散形式和积分形式. 利用 (2.18) 式，有

$$\|f+g\|_{p,\omega} \leqslant \|f\|_{p,\omega} + \|g\|_{p,\omega} (1 \leqslant p \leqslant \infty). \tag{2.40}$$

特别当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，有

$$(\int_E |f+g|^p \omega d\mu)^{1/p} \leqslant (\int_E |f|^p \omega d\mu)^{1/p} + (\int_E |g|^p \omega d\mu)^{1/p}. \tag{2.41}$$

当 $0 < p < 1$ 时，不等号反向.

注 因为 $0 < p < 1$ 时，(2.40) 式中不等号要反向. 所以，$\|\cdot\|_{p,\omega}$ 不是范数，但由于这时成立与 (2.40) 式等价的：

$$\|f+g\|_{p,\omega}^p \leqslant \|f\|_{p,\omega}^p + \|g\|_{p,\omega}^p \quad (0 < p < 1), \tag{2.42}$$

故仍可按 $d(f,g) = \|f-g\|_{p,w}^p$ 定义距离，使 $L^p(E)$ 形成一个完备的距离空间. 当 $0 < p < 1$ 时，还成立

$$\|f\|_{p,\omega} + \|g\|_{p,\omega} \leqslant \|f+g\|_{p,\omega} \leqslant 2^{(1/p)-1}(\|f\|_{p,\omega} + \|g\|_{p,\omega}).$$

证 若 $p = 1$ 或 $f+g = 0$ a.e. 于 E，则 (2.40) 式显然成立.

若 $1 < p < \infty$，则从 $|f+g|^p \omega \leqslant (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}\omega$. 和 Hölder 不等式 (2.19) 式并注意到 $(p-1)q = p$ (p, q 为一对共轭指数)，得到

$$\|f+g\|_{p,\omega}^p = \int_E |f+g|^p \omega d\mu \leqslant \|f\|_{p,\omega} \| |f+g|^{p-1} \|_{q,\omega} +$$

$$+\|g\|_{p,\omega}\|\,|f+g|^{p-1}\|_{q,\omega}=(\|f\|_{p,\omega}+\|g\|_{p,\omega})(\int_E|f+g|^p\omega d\mu)^{1/q}.$$

从而 $\|f+g\|_{p,\omega}=(\int_E|f+g|^p\omega d\mu)^{1-(1/q)}\leqslant\|f\|_{p,\omega}+\|g\|_{p,\omega}$. 证毕.

1986 年,王志雄通过证明函数

$$f(t)=\left([\sum_{k=1}^n x_k(y_k+t)^\alpha]^{1/\alpha}\right)/\left([\sum_{k=1}^n x_k(y_k+t)^\beta]^{1/\beta}\right)$$

$(x_k,y_k>0,\beta>\alpha)$ 在$[0,\infty)$上递增且仅当 $y_1=y_2=\cdots=y_n$ 时 $f(t)$ 为常值函数,证明

$$(\sum_{k=1}^n x_ky_k^\alpha)^{1/\alpha}\leqslant(\sum_{k=1}^n x_k)^r(\sum_{k=1}^n x_ky_k^\beta)^{1/\beta},\text{式中 } r=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta},$$

仅当 $y_1=\cdots=y_n$ 时等号成立.

取 $\alpha=1,\beta=p>1,x_k=b_k^q,y_k=(\frac{a_k^p}{b_k^q})^{1/p}$,即得 Hölder 不等式(2.1).

取 $\alpha=1,\beta=p>1,x_k=(a_k+b_k)^p,y_k=a_k/(a_k+b_k)$,即可得 Minkowski 不等式(2.31).见[345]1986,3:36 - 37.

4. **广义 Minkowski 不等式**:设$(X,\sum_1,\mu_1)$和$(Y,\sum_2,\mu_2)$是两个抽象测度空间. f 在σ有限的乘积空间$X\times Y$上可测,则当 $1\leqslant p<\infty$ 时,成立

$$\left\{\int_Y\left(\int_X|f(x,y)|d\mu_1\right)^pd\mu_2\right\}^{1/p}\leqslant\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|^pd\mu_2\right)^{1/p}d\mu_1,\quad(2.43)$$

仅当 $f(x,y)=g_1(x)g_2(y)$ 时等号成立.若将(2.43)式记为

$$\|\int_X|f(x,\cdot)|d\mu_1\|_p\leqslant\int_X\|f(x,\cdot)\|_pd\mu_1,\quad(2.44)$$

则(2.44)式对 $p=\infty$ 也成立.

证 设 φ 是 Y 上正的可测函数,且 $\|\varphi\|_q\leqslant1$.

记 $g(y)=\int_X|f(x,y)|d\mu_1$,则由 Fubini 定理,

$$\int_Yg(y)\varphi(y)d\mu_2=\int_Y(\int_X|f(x,y)|d\mu_1)\varphi(y)d\mu_2=$$
$$=\int_X(\int_Y|f(x,y)|\varphi(y)d\mu_2)d\mu_1.$$

由 Hölder 不等式(2.19)有

$$\int_Y|f(x,y)|\varphi(y)d\mu_2\leqslant(\int_Y|f(x,\cdot)|^pd\mu_2)^{1/p}(\int_Y\varphi(y)^qd\mu_2)^{1/q}=$$
$$=\|f(x,\cdot)\|_p\|\varphi\|_q.$$

于是, $|\int_Y|f(x,y)|\varphi(y)d\mu_2|\leqslant\int_X\|f(x,\cdot)\|_pd\mu_1\cdot\|\varphi\|_q$.

再由(2.20)式,得

$$\|g\|_p=\sup\{\int_Y|f(x,y)|\varphi(y)d\mu_2:\|\varphi\|_q\leqslant1\}\leqslant\int_X\|f(x,\cdot)\|_pd\mu_1.$$

5. **Minkowski 型不等式的其他形式**:

(1) **乘积型 Minkowski 不等式**:设 $a_k,b_k\geqslant0$,则

$$\left\{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right\}^{1/n} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}+\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)^{1/n}. \tag{2.45}$$

证 由 AG 不等式,有

$$\left\{\prod_{k=1}^{n}a_k\right\}^{1/n}=\min\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kc_k}{n}:\prod_{k=1}^{n}c_k=1,c_k\geqslant 0\right\}.$$

于是,(下面求 min 的范围是 $D(c)=\{c=(c_1,\cdots,c_n):\prod_{k=1}^{n}c_k=1,c_k\geqslant 0\}$)

$$\left\{\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right\}^{1/n}=\min\sum_{k=1}^{n}\frac{(a_k+b_k)c_k}{n}\geqslant\min\sum_{k=1}^{n}\frac{a_kc_k}{n}+\min\sum_{k=1}^{n}\frac{b_kc_k}{n}$$

$$=\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}+\left(\prod_{k=1}^{n}b_k\right)^{1/n}. \qquad (见[2]P.26)$$

(2) **Mahler 不等式**:设 X 为 Hilbert 空间,若函数 F 满足:

① $F(x)>0,\ x\neq 0$;

② 对 $t\geqslant 0,\ F(tx)=tF(x)$;

③ $F(x+y)\leqslant F(x)+F(y)$.

则称 $F(x)$ 为 x 的**广义范数**.

$G(y)=\max\limits_{x}\left\{\dfrac{(x,y)}{F(x)}\right\}$ 称为 F 的极函数,则内积

$$(x,y)\leqslant F(x)G(y). \tag{2.46}$$

(3) **行列式的 Minkowski 不等式**:设 A、B 为 n 阶正定矩阵,则

$$|A|^{1/n}+|B|^{1/n}\leqslant|A+B|^{1/n}. \tag{2.47}$$

式中 $|A|=\det A$ 表示 A 相应的行列式.

推论 设 A_k 为 n 阶正定矩阵,则 $\forall\lambda_k>0$,有

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k|A_k|^{1/n}\leqslant\left|\sum_{k=1}^{m}\lambda_kA_k\right|^{1/n}, \tag{2.48}$$

仅当任意两个矩阵 A_j,A_k 相差一个正数倍时等号成立.

证明可用数学归纳法或凸函数不等式,也可用高等代数方法,见[2]P70,[345]1985,3:31 和 1987,8:39.[335]1991,3:64 - 66.

三、 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式的改进和推广

Hardy 等在名著[1]中再三强调 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式"极为重要"和"到处都要用到",这两个不等式和 AG 不等式就构成了[1]中前面 6 章的主题,占了全书一半以上的篇幅.[2],[4][10]中又补充了大量新的研究文献,一百多年来,对这两个不等式的种种改进和推广的工作一直没有中断,这么多文献已无法容纳在一本书之中.下面仅介绍若干重要的和最新的结果.

1. 设 $a_{jk}>0,p_j>0,\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{1}{p_j}\geqslant 1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{m}a_{jk}\right)\leqslant\prod_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{jk}^{p_j}\right)^{1/p_j}. \tag{2.49}$$

若 $p_j < 0, \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} \leqslant -1$,则(2.49)式中不等号反向.

(Jensen, J. L. W. V., [322]1906, 30: 175 - 193)

证明(2.49)式时,可利用加权 AG 不等式,见[4]P67,102.

2. 设 $a_k, b_k > 0, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} < 1, p, q > 0$. $\| a \|_p$ 由(2.2)式定义,则

$$2 \| ab \|_1^{1/r} \leqslant \| a \|_p \cdot \| b \|_q + (\sum_k a_k^{2-p} b_k^2)^{1/p} \sum_k a_k^2 b_k^{2-q})^{1/q}. \quad (2.50$$

(Daykin-Eliezer, [319]1968, 64: 1023 - 1027)

若 $p, q > 0$,或 $p > 0, q < 0, r < 0$,则

$$\| ab \|_r \leqslant \| a \|_p \| b \|_q, \quad (2.51$$

当 $p < 0, q < 0$ 或 $p > 0, q < 0, r > 0$ 时不等号反向.

(Aczel-Beckenbach, 1978[54]2,转引[345]1983, 3: 24 - 28)

3. 1968 年 Daykin-Eliezer 证明:设 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}, Q = \prod_{j,k=1}^{n} (a_j a_k b_j b_k)^{a_j a_k b_j b_k}$,

(1) 若 $0 < a_k < 1, 0 < b_k < 1$ 或 $Q < 1$ 且 $\frac{1}{r} < 1$,则

$$\| ab \|_1^{1/r} \leqslant (\sum_k a_k^{2-p} b_k^2)^{1/p} (\sum_k a_k^2 b_k^{2-q})^{1/q}. \quad (2.52$$

(2) 若 $a_k > 1, b_k > 1$,或 $Q > 1$ 且 $\frac{1}{r} < 1$,则

$$\| ab \|_1^{1/r} \leqslant \| a \|_p \| b \|_q. \quad (2.53$$

Daykin-Eliezer 利用

$$F(x) = \left\{ \sum_k a_k b_k \left(\frac{a_k^p}{a_k b_k} \right)^x \right\}^{1/p} \left\{ \sum_k a_k b_k \left(\frac{a_k^q}{a_k b_k} \right)^x \right\}^{1/q}$$

的凸性来证明,证法很繁(见[319]1968, 64: 1023 - 1027). 1995 年高明哲给出了一个十分简洁的证明:因为 $0 < a_k < 1, 0 < b_k < 1$,所以 $(a_k b_k)^{1-r} \geqslant 1$. 从而 $a_k b_k \leqslant (a_k b_k)(a_k b_k)^{1-r} = (a_k b_k)^2 / (a_k b_k)^r$. 对 k 求和,得到

$$\sum_k a_k b_k \leqslant \sum_k \frac{a_k^2 b_k^2}{(a_k b_k)^2} = \sum_k (a_k^{2r/p} b_k^{2r/p} a_k^{-r}) \times$$

$$\times \left(\frac{a_k^{2r/q} b_k^{2r/q}}{b_k^r} \right) \leqslant \left(\sum_k \frac{a_k^2 b_k^2}{a_k^p} \right)^{r/p} \left(\sum_k \frac{a_k^2 b_k^2}{b_k^q} \right)^{r/q}.$$

两边开 r 次方,即得(2.52)式,见[350]1995.3.

1996 年刘证将(2.50)、(2.52)式和(2.53)式推广到 $\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{p_j} < 1$ 的情形. 见[344]1998, 28(4): 302 - 308.

4. 1990 年郝雅传证明:设 $a_{jk} > 0, q_j > 0, Q_m = \sum_{j=1}^{m} q_j < 1, 1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{m} a_{jk}^{q_j} \right) \leqslant n^{(1-Q_m)} \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \right)^{q_j}, \quad (2.54$$

仅当$(a_{1k}),(a_{2k}),\cdots,(a_{mk})$中每组都是常数时等号成立.

推论 设 $a_k>0,q_k>0,1\leqslant k\leqslant n.0<\sum_{k=1}^{n}q_k<1$,则

$$\prod_{k=1}^{n}a_k^{q_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}q_ka_k+(1-\sum_{k=1}^{n}q_k).\tag{2.55}$$

这些结果还推广到四元数矩阵上,见[342]1990,5(4):42 - 47.

5. 1998 年高明哲将内积空间 X 中的 Cauchy 不等式

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|\tag{2.56}$$

改进为

$$|(x,y)|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2-G(x,y,z),\tag{2.57}$$

式中 $\|x\|=\sqrt{(x,x)},z\in X$ 为任意向量,且 $\|z\|=1$.

$$G(x,y,z)=(\|x\|(y,z)-\|y\|(x,z))^2.\tag{2.58}$$

仅当 x,y,z 线性相关时(2.57)式中等号成立.

(见[301]1999,234:727 - 734).(2.58)式的基本证明思路是考虑 Gram 行列式

$$A=\begin{vmatrix}(x,x)&(x,y)&(x,z)\\(y,x)&(y,y)&(y,z)\\(z,x)&(z,y)&(z,z)\end{vmatrix},$$证明 $A>0$,然后将行列式 A 展开.

利用内积(x,y),可以将 Hölder 不等式记为

$$(x,y)\leqslant\|x\|_p\|y\|_q,(x,y)\in L^p\times L^q.\tag{2.59}$$

1999 年,Alfredo,N. 等证明:设 $z=y|y|^{q-2},1<p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则当 $1<p\leqslant 2$ 时,(2.59)式可改进为

$$\|x\|_p\|y\|_q-(x,y)\geqslant\frac{1}{p}[(\|x\|_p+\|z\|_p)^p-\|x+z\|_p^p]\geqslant 0;\tag{2.60}$$

而当 $p\geqslant 2$ 时,成立

$$0\leqslant\|x\|_p\|y\|_q-(x,y)\leqslant\frac{1}{p}[(\|x\|_p+\|z\|_p)^p-\|x+z\|_p^p].\tag{2.61}$$

(见[308]1999,127(8):2405 - 2415)

当 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$ 时,$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k,\|x\|_p=$ $=(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p)^{1/p}$,记 $|x|^p=(|x_1|^p,\cdots,|x_n|^p).\log|x|=(\log|x_1|,\cdots,\log|x_n|)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,1<p<\infty$,若 $x,y\in R^n-\{0\}$,则

$$0\leqslant 1-\frac{(|x|,|y|)}{\|x\|_p\|y\|_q}\leqslant(\alpha,\beta),\tag{2.62}$$

式中 $\alpha=\frac{|x|^p}{\|x\|_p^p}-\frac{|y|^q}{\|y\|_q^q},\beta=\frac{1}{q}\log|x|-\frac{1}{p}\log|y|$.

证明(2.62)式的基本工具是利用 R 的开区间上凸的可微映射的 Jensen 不等式的推广,见Dragomir-Goh,Mitt. Math. Ges. Hamburg. 1997,16:99 - 106.

6. 1991 年 Dragomir, S. S. 给出了 Cauchy 不等式的一种加细：设 a_k, b_k 为实数且 $|a_k|+|b_k|\neq 0$，则

$$(\sum_k a_k b_k)^2 \leqslant (\sum_k (a_k^2+b_k^2))(\sum_k \frac{a_k^2 b_k^2}{a_k^2+b_k^2}) \leqslant (\sum_k a_k^2)(\sum_k b_k^2). \tag{2.63}$$

（见 Rad. Mat. 1991, 7(2): 299 − 303）

7. **胡克不等式**：设 $p \geqslant q \geqslant 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1-e_n+e_m \geqslant 0, a_n, b_n \geqslant 0$，则

$$\sum_n a_n b_n \leqslant (\sum_n b_n^q)^{(1/q-1/p)}\{(\sum_n b_n^q)^2(\sum_n a_n^p)^2 - [(\sum_n b_n^q e_n)\sum_n a_n^p - (\sum_n b_n^q)(\sum_n a_n^p e_n)]^2\}^{\frac{1}{2p}}. \tag{2.64}$$

相应的积分形式是：设 $p \geqslant q \geqslant 0, \frac{1}{P}+\frac{1}{q}=1, f(x), g(x) \geqslant 0, 1-\omega(x)+\omega(y) \geqslant 0$，则

$$\int fg \leqslant (\int g^q)^{(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\{(\int g^q)^2(\int f^p)^2 - [(\int g^q\omega)(\int f^p) - (\int g^q)(\int g^p\omega)]^2\}^{\frac{1}{2p}}. \tag{2.65}$$

推论 设 $a_n \geqslant 0, p>1, 1-e_n+e_m \geqslant 0, n, m=1,2,\cdots,N$，则

$$(\sum_{k=1}^N a_k)^{2(2p-1)} \leqslant (\sum_{k=1}^N a_k^p)^2\{N^2(\sum_{k=1}^N a_k)^2 - [N\sum_{k=1}^N a_k e_k - (\sum_{k=1}^N a_k)(\sum_{k=1}^N e_k)]^2\}^{p-1}. \tag{2.66}$$

相应的积分形式是：设 $f \geqslant 0, f \in L^p[a,b], 1-\omega(x)+\omega(y) \geqslant 0, x, y \in [a,b], p>1$，则

$$(\int_a^b f)^{2(2p-1)} \leqslant (\int_a^b f^p)^2\{(b-a)^2(\int_a^b f)^2 - [(b-a)\int_a^b f\omega - (\int_a^b f)(\int_a^b \omega)]^2\}^{p-1}. \tag{2.67}$$

在(2.65)式中取 $\omega(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi(x-a)}{b-a}$，得到

$$(\int_a^b f)^{2(2p-1)} \leqslant (\int_a^b f^p)^2\{(b-a)^{2(1-\frac{1}{p})}(\int_a^b f^p)^{2/p} - \frac{1}{4}(\int_a^b f^p\cos\frac{\pi(x-a)}{b-a})^{2/p}\}^{p-1}.$$

胡克不等式克服了 Hölder 不等式在使用时的缺陷，改进和推广了许多重要的著名不等式，美国“数学评论”称为是一个“杰出的非凡的新不等式”. 例如，可将 Minkowski 不等式改进为：设 $p \geqslant 1, a_k, b_k \geqslant 0$，则

$$\{\sum_k (a_k+b_k)^p\}^{1/p} \leqslant (\sum_k a_k^p)^{1/p} + \sum_k b_k^p)^{1/p} - \frac{1}{2}g(p)R^2(a,b), \tag{2.68}$$

式中 当 $p \geqslant 2$ 时 $g(p)=1/(2p)$；当 $1 \leqslant p < 2$ 时，$g(p)=(p-1)/(2p)$，

$$R(a,b)=\frac{\sum_k (a_k^p+b_k^p)[\sum_k (a_k+b_k)^p e_k] - [\sum_k (a_k^p+b_k^p)e_k]\sum_k (a_k+b_k)^p}{\{\sum_k (a_k+b_k)^p\}^{3/2}},$$

$1-e_k+e_j \geqslant 0$. 见[29].

1998 年，胡克又进一步证明：设 $f, g \geqslant 0, f \in L^p[0,b], g \in L^q[0,b], p \geqslant q > 1$，

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $|\overline{\omega}(x)\omega(y)-\omega(x)\overline{\omega(y)}|\leqslant 1, x,y\in[0,b]$.

$$F_s(t)=\left\{\left(\int_0^t g^q\right)^{(2/q-2/p)}\right\}^s\times$$
$$\times\left\{\left(\int_0^t f^p\right)^2\left(\int_0^t g^q\right)^2-\left[\left(\int_0^t f^p\omega\right)\left(\int_0^t g^q\overline{\omega}\right)-\left(\int_0^t f^p\overline{\omega}\right)\left(\int_0^t g^q\omega\right)\right]^2\right\}^{s/p}-\left(\int_0^t fg\right)^{2s}, \tag{2.69}$$

则对于 $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b, s=1,2,\cdots$,成立

$$F_s(t_2)\geqslant F_s(t_1)\geqslant 0. \tag{2.70}$$

(见 Acta Math. Sci 1998,18(2):192 - 199. 另见[121]P. 1 - 4)

设 $a=(a_1,\cdots,a_n), b=(b_1,\cdots,b_n), a_k,b_k>0, 1\leqslant k\leqslant n, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1=\frac{1}{r}$, $p,q>0$. 则

$$\|ab\|_1^{1+\frac{1}{r}}\leqslant(\|a\|_p\|b\|_q\|a^{2/p-1}b^{2/p}\|_p\|a^{2/q}b^{2/q-1}\|_q)^{1/2};$$

而且

$$f(x)=\|(ab)^{(1-x)/p}a^x\|_p\|(ab)^{(1-x)/q}b^x\|_q$$

是对数凸函数,当 $r=\infty$ 即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 达到最小值,从而改进了 Daykin-Eliezer 的相应结果.(王中烈等,Congr. Numer 1992,87:119 - 128)

8. 设 $a_{jk}>0, j=1,\cdots,m, k=1,\cdots,n, p_j>0, \sum_{j=1}^m\frac{1}{p_j}=1$. 令

$$h(t)=\prod_{i=1}^n\left[\sum_{j=1}^m\left(\prod_{k=1}^n a_{jk}\right)^{1-t}(a_{ji}^{p_j})^t\right]^{1/p_i}, \tag{2.71}$$

则 h 是 t 的递增函数. 特别

$$h(0)\leqslant h\left(\frac{1}{2}\right)\leqslant h(1) \tag{2.72}$$

是 Hölder 不等式的加细.

(Yang Xianjing,[301]2000,247(1):328 - 330)

Pecaric, J. E. 证明了 Hölder 不等式的单调性质:

设 $a_k,b_k\geqslant 0, u_k\geqslant v_k\geqslant 0, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1<p<\infty$,则

$$0\leqslant\left(\sum_{k=1}^n v_ka_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n v_kb_k^q\right)^{1/q}-\sum_{k=1}^n v_ka_kb_k\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^n u_ka_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n u_kb_k^q\right)^{1/q}-\sum_{k=1}^n u_ka_kb_k, \tag{2.73}$$

当 $0<p<1$ 时,不等号反向.(见 Mat. Bilt, 1993, 17:69 - 74)

9. Hölder 不等式的改进往往依赖于 Young 不等式(2.25)的改进.(2.25)式可写成以下形式:设 $a,b\geqslant 0, 1<p<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q. \tag{2.74}$$

Hirzallah, Omar 等将(2.74)式改进为

$$a^2b^2+\frac{1}{r^2}(a^p-b^q)^2\leqslant(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q)^2, \tag{2.75}$$

式中 $r=\max\{p,q\}$，在(2.75)式中取 $a=|f(x)|/\|f\|_{p,w}$，$b=|g(x)|/\|g\|_{q,\omega}$，$\|f\|_{p,\omega}$ 的定义见(2.18)式，即可得出 Hölder 不等式的改进：

$$\|fg\|_{1,\omega}^2+\frac{1}{r^2}\int_E(|f|^p\|g\|_{q,\omega}-|g|^q\|f\|_{p,\omega})^2\omega\mathrm{d}\mu\leqslant\|f\|_{p,\omega}^2\|g\|_{q,\omega}^2. \tag{2.76}$$

(见[386]2000，308(1－3)：77－84)

10.　当对数列 $x=\{x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$，$y=\{y_1,\cdots,y_n,\cdots\}$，或函数 $f.g$ 加上一些限制后，Hölder 不等式还可以得到进一步的改进，例如：

(1)　设 $0<x_1\leqslant\frac{x_2}{2}\leqslant\cdots\leqslant\frac{x_n}{n}$，$0<y_n\leqslant y_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant y_1$，则 Cauchy 不等式可改进为

$$(\sum_{k=1}^n x_ky_k)^2\leqslant\sum_{k=1}^n y_k\sum_{k=1}^n(x_k^2-\frac{1}{4}x_kx_{k-1})y_k;$$

$$(\sum_{k=1}^n x_ky_k)^2\leqslant(\sum_{j=1}^n y_j)\left\{\sum_{k=1}^n(\frac{7k+1}{8k}x_k^2-\frac{k}{8(k-1)}x_{k-1}^2)y_k\right\}, \tag{2.77}$$

且仅当 $\forall x_k=kx_1,y_k=y_1$ 时等号成立. 式中 $x_0=0$.(Liu Zheng，[301]1998，218：13－21)Alzer, H. 则进一步改进为仅当 $\alpha\geqslant 3/4$，$\beta\geqslant 1-\alpha$ 时成立

$$(\sum_{k=1}^n x_ky_k)^2\leqslant(\sum_{j=1}^n y_j)\left\{\sum_{k=1}^n(\alpha+\frac{\beta}{k})x_k^2y_k\right\}. \tag{2.78}$$

(见[301]1999，234：6－14)

(2)　设 $1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，$0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_1$，$0\leqslant y_n\leqslant y_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant y_1$，$B_n=\frac{1}{m-k}\sum_{j=k+1}^n y_j$，则

$$\sum_{k=1}^n x_ky_k\leqslant(\sum_{i=1}^m x_i^p)^{1/p}(\sum_{j=1}^k y_j^q+(m-k)B_n^q)^{1/q}, \tag{2.79}$$

式中 $0\leqslant k\leqslant m\leqslant n$. 见[151].

(3)　设 $a_k,b_k\geqslant 0$，$k=1,\cdots,n$. $\{A_k\}$，$\{B_k\}$ 分别是 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 按递减次序的值，即 $A_1\geqslant A_2\geqslant\cdots\geqslant A_n$，$B_1\geqslant B_2\geqslant\cdots\geqslant B_n$. 若 $1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，则

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k\leqslant(\sum_{k=1}^m A_k^p)^{1/p}\{\sum_{j=1}^{m-k-1}B_j^q+(k+1)^{-(q/p)}B_{[n-k]}^q\}^{1/q}, \tag{2.80}$$

式中 $B_{[j]}=\sum_{i=j}^n B_i$，而 k 是满足条件 $kB_{m-k}<B_{[m-k+1]}$ 和 $(k+1)B_{m-k-1}\geqslant B_{[m-k]}$，$(0\leqslant k\leqslant m-1)$ 的最大整数. $1\leqslant m\leqslant n$.

若 $0<p<1$，则对所有 $a_k,b_k>0$，$\{A_k\}$ 是 $\{a_k\}$ 的递增次序值，$\{B_k\}$ 是 $\{b_k\}$ 的递减次序值时，(2.80)式中不等号反向. 见[301]1984，102(2)：435－441.

(4)　设 $f,g_k:[a,b]\to R$ 非负递增，且 $g_k'\in L^p[a,b]$，则当 $1<p<\infty$ 时，成立 Minkowski 型不等式：

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b (g_k^p(t))' f(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} g_k^p(t)\right)' f(t)\mathrm{d}t\right\}^{1/p},$$

若 f 递减且 $g_k(a)=0, k=1,\cdots,n$. 则不等号反向.(Sanja, V., [361]1995, 20(1):250 – 255)

11. **反向 Hölder 不等式和反向 Minkowski 不等式**:设 $1<p<\infty, 1/p+1/q=1$, 寻找常数 c_{pq}, 使得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} \leqslant c_{pq}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \tag{2.81}$$

式中 $a_k, b_k \geqslant 0$, 则(2.81)式称为反向 Hölder 不等式.

这方面的研究也有很长的历史,如见[1][2]. 下面的 $\|a\|_p$ 仍按(2.2)式定义.

(1) 设 $a=\{a_k\}, b=\{b_k\}$ 为实数列,则

$$-\frac{1}{4}(\|a-b\|_1+\|a\|_1-\|b\|_1)(\|a-b\|_1-\|a\|_1+\|b\|_1) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{4}(\|a+b\|_1+\|a\|_1-\|b\|_1)(\|a+b\|_1-\|a\|_1+\|b\|_1);$$

$$-\frac{1}{2}(\|a\|_1+\|b\|_1-\|a+b\|_1)\max\{\|a\|_1, \|b\|_1\} \leqslant \sum_k |a_k b_k| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(\|a\|_1+\|b\|_1-\|a-b\|_1)\max\{\|a\|_1, \|b\|_1\}.$$

见[331]1979, No. 634 – 677:143 – 147.

(2) 1989 年游光荣证明:设 $0<m_1\leqslant a_k\leqslant M_1, 0<m_2\leqslant b_k\leqslant M_2, 1\leqslant k\leqslant n$, $1/p+1/q=1/r$.

① 若 $p, q>0$, 则

$$\left(\frac{m_1}{M_1}\right)^{r/q}\left(\frac{m_2}{M_2}\right)^{r/p} \leqslant \frac{\|ab\|_r}{\|a\|_p\|b\|_q} \leqslant 1; \tag{2.82}$$

② 若 $p>0, q<0, r>0$, 则

$$1 \leqslant \frac{\|ab\|_r}{\|a\|_p\|b\|_q} \leqslant \left(\frac{m_1}{M_1}\right)^{r/q}\left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{r/p}; \tag{2.83}$$

若 $p>0, q<0, r<0$, 则(2.83)式中不等号全部反向;

③ 若 $p<0, q<0$, 则

$$1 \leqslant \frac{\|ab\|_r}{\|a\|_p\|b\|_q} \leqslant \left(\frac{M_1}{m_1}\right)^{r/q}\left(\frac{M_2}{m_2}\right)^{r/p}.$$

④ 若 $r=1$, 则当 $p>1$ 时,成立

$$\begin{aligned}&\left(\frac{m_1+m_2}{M_1+M_2}\right)^{1/p}\left[\left(\frac{m_1}{M_1}\right)^{1/q}\|a\|_p+\left(\frac{m_2}{M_2}\right)^{1/q}\|b\|_q\right]\\ &\leqslant \|a+b\|_p \leqslant \|a\|_p+\|b\|_p.\end{aligned} \tag{2.84}$$

而当 $0<p<1$ 时, $\|a\|_p+\|b\|_p \leqslant \|a+b\|_p \leqslant$

$$\leqslant \left(\frac{M_1+M_2}{m_1+m_2}\right)^{1/p}\left[\left(\frac{m_1}{M_1}\right)^{1/q}\|a\|_p+\left(\frac{m_2}{M_2}\right)^{1/q}\|b\|_p\right]. \tag{2.85}$$

见[356]1989, 9(1 – 2):35 – 43.

(3)　设 $0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_k \leqslant M_2, k = 1, \cdots, n, 1/p + 1/q = 1$,则

$$\| a \|_p \cdot \| b \|_q \leqslant c_{p,q} \| ab \|_1, \tag{2.86}$$

式中

$$c_{p,q} = \frac{M_1^p M_2^q - m_1^p m_2^q}{[p(M_1 m_2 M_2^q - m_1 M_2 m_2^q)]^{1/p}[q(m_1 M_2 M_1^p - M_1 m_2 m_1^p)]^{1/q}}.$$

(Diaz-Goldman-Metcalf, SIAN Review, 1979, 21(4); 550 - 557). 特别,取 $p = q = 2$,得

$$\| ab \|_1 \leqslant \| a \|_2 \| b \|_2 \leqslant c_2 \| ab \|_1. \tag{2.87}$$

1925 年 Polya-Szego 证明式中

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right).$$

(2.87) 式右边等号成立的充要条件是:令

$$\beta_1 = \frac{M_1/m_1}{(M_1/m_1) + (M_2/m_2)}, \beta_2 = \frac{M_2/m_2}{(M_1/m_1) + (M_2/m_2)},$$

则 $k = \beta_1 n, l = \beta_2 n$ 都是整数且有 k 个 a_j 与 m_1 重合,其余 $l = n - k$ 个与 M_1 重合,而相应的 b_j 则分别与 M_2, m_2 重合.(见[56]Vol. 1. p. 74.)

1986 年邵剑波证明:设 $0 < m_1 \leqslant |a_k| \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant |b_k| \leqslant M_2, 1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$\sqrt{\frac{m_2 M_2}{m_1 M_1}}\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) + \sqrt{\frac{m_1 M_1}{m_2 M_2}}\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sqrt{\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2}} + \sqrt{\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}}\right)\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k|\right),$$

仅当有 p 个 a_k 与 m_1 重合,其余 $n - p$ 个 a_k 与 M_1 重合,而相应的 b_k 分别与 M_2, m_2 重合时等号成立.

证　从假设条件,$\frac{m_1}{M_2} \leqslant \left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leqslant \frac{M_1}{m_2}$,于是

$$\sum_{k=1}^n \{m_2 M_2 |a_k|^2 - (m_1 m_2 + M_1 M_2)|a_k b_k| + m_1 M_1 |b_k|^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^n m_2 M_2 |b_k|^2 \left(\left|\frac{a_k}{b_k}\right| - \frac{M_1}{m_2}\right)\left(\left|\frac{a_k}{b_k}\right| - \frac{m_1}{M_2}\right) \leqslant 0.$$

从而

$$m_2 M_2 \sum_{k=1}^n |a_k|^2 + m_1 M_1 \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \leqslant (m_1 m_2 + M_1 M_2) \sum_{k=1}^n |a_k b_k|.$$

两边同除以 $\sqrt{m_1 m_2 M_1 M_2}$ 即可得证. 见[344]1986, 3:76 - 78.

1964 年 Diaz-Metcalf 对(2.87) 式中的 c_2 作了改进,证明

$$\frac{m_1 M_1 \| b \|_2^2 + m_2 M_2 \| a \|_2^2}{m_1 m_2 + M_1 M_2} \leqslant \| ab \|_1.$$

见[301]1964, 9:59 - 74.

1969 年 Baraes, D. C. 还证明:若 $0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n, 0 \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant b_1$,且 $a_{k-1} + a_{k+1} \leqslant 2a_k$,　$b_{k-1} + b_{k+1} \leqslant 2b_k, k = 2, \cdots, n-1$. 则 $c_2 = (2n-1)/(n-2)$,

且仅当 $a_k = n - k, b_k = k - 1$ 时(2.87)式中右边的等号成立.

相应的积分形式是:设 $f \in L^p[0,a], g \in L^q[0,a]$.若 f,g 是$[0,a]$上非负的凹函数,且 $0 < \|f\|_p < \infty, 0 < \|g\|_q < \infty$.则在

$$\|f\|_p \|g\|_q \leqslant c_{p,q} \|fg\|_1 \tag{2.88}$$

中,当 $p > 1$ 时,$c_{p,q} = \dfrac{6}{(1+p)^{1/p}(1+q)^{1/q}a^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}$.而当 $|p| < 1, |q| < 1$ 时,

$$c_{p,q} = \frac{3}{(1+p)^{1/p}(1+q)^{1/q}a^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}.$$

(见[301]1969,26:82 - 87,或[4]530 - 532)

1986 年,陈广卿利用凸函数不等式证明:当 $p,q > 0, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 时,(2.86)式中 $c_{p,q}$ 为

$$c_{p,q} = \frac{\left(\dfrac{1}{p}\right)^{1/p}\left(\dfrac{1}{q}\right)^{1/q}\begin{vmatrix} x_2 & f(x_2) \\ x_1 & f(x_1)\end{vmatrix}}{(x_2 - x_1)^{1/q}(f(x_1) - f(x_2))^{1/p}}.$$

式中 $f(x) = x^{-q/p}$,而且

$$x_1 = \min_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{|a_k|^p}{|a_k b_k|}\right\} < x_2 = \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{|a_k|^p}{|a_k b_k|}\right\}.$$

见[301]1986,1:54 - 57.(2.87)式的加权形式是:设 $a_k, b_k > 0, \omega_k \geqslant 0$ 且不全为零.$1 \leqslant k \leqslant n$,则

$$1 \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2\omega_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2\omega_k\right)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\omega_k\right)^2} \leqslant \max_{k,j}\frac{(a_k b_j + a_j b_k)^2}{4a_k a_j b_k b_j}.$$

(见[2]P45)

Zagier 不等式的加权形式:设 f 与 g 在$[a,b]$上递减,$f(b) = g(b) = 0$,非负权函数 ω 在$[a,b]$上可积,则

$$\|f\|_{2,\omega}^2 \|g\|_{2,\omega}^2 \leqslant \max\left\{f(a)\int_a^b g\omega, g(a)\int_a^b f\omega\right\}\|fg\|_{1,\omega},$$

(Pecaric,J.E.,[404]1994,12(3);125 - 127)

1991 年楼宇同证明:设 $0 < m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant g(x) \leqslant M_2, x \in E, f, g, \omega \in L(E), \omega \geqslant 0$,则

$$\|f\|_{2,\omega} \|g\|_{2,\omega} \leqslant C \|fg\|_{1,\omega};$$

离散类似是:

$$\|a\|_{2,\omega} \|b\|_{2,\omega} \leqslant C \|ab\|_{1,\omega},$$

式中 $0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_k \leqslant M_2, C = \dfrac{m_1 m_2 + M_1 M_2}{2\sqrt{m_1 m_2 M_1 M_2}}$.

见[353]1991,4:24 - 28.

(4) 1990 年刘晓华证明:设 $p,q > 0, 1/p + 1/q = 1, 0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2$

$\leqslant b_k \leqslant M_2$，则

$$\| a \|_p \| b \|_q \leqslant c_{p,q}\left(\frac{m_1 m_2}{M_1 M_2}\right) \| ab \|_1, \tag{2.89}$$

式中

$$c_{p,q}(\zeta) = (p^{1/p}q^{1/q})^{-1} \frac{1-\zeta}{(1-\zeta^{1/p})^{1/p}(1-\zeta^{1/q})^{1/q}}. \tag{2.90}$$

它的加权形式是：设 $0 < m \leqslant a_k/b_k \leqslant M, \omega_k \geqslant 0$，则

$$\| a \|_{p,\omega} \| b \|_{q,\omega} \leqslant c_{p,q}\left(\frac{m}{M}\right) \| ab \|_{1,\omega}, \tag{2.91}$$

式中 $\| a \|_{p,\omega} = (\sum\limits_k a_k^p \omega_k)^{1/p}$. (2.91) 式的积分形式是：设 $(X, \sum, \mu)$ 为测度空间，f, g 为 X 上关于 μ 的非负可测函数，若 $0 < m \leqslant f(x)/g(x) \leqslant M$ 在 X 上几乎处处成立，$f \cdot g \in L(X), 1/p + 1/q = 1, p, q > 0$，则

$$\| f \|_{p,\omega} \| g \|_{q,\omega} \leqslant c_{p,q}\left(\frac{m}{M}\right) \| fg \|_{1,\omega}, \tag{2.92}$$

式中 $\| f \|_{p,\omega} = \left(\int_X f^p \omega\right)^{1/p}$. 见[301]1990, 1:84－88.

庄亚栋(Zhuang Ya-Dong) 证明：设 $0 < m_1 \leqslant a_k \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b_k \leqslant M_2, 1 \leqslant k \leqslant n, 1/p + 1/q = 1, 1 < p < \infty$，则 $\forall \alpha, \beta > 0$，成立.

$$\| a \|_p \| b \|_q \leqslant c_{p,q} \| ab \|_1. \tag{2.93}$$

式中 $c_{p,q} = (\alpha p)^{-1/p}(\beta q)^{-1/q} \max\left\{\frac{\alpha M_1^p + \beta m_2^q}{M_1 m_2}, \frac{\alpha m_1^p + \beta M_2^q}{m_1 M_2}\right\}$,

庄还通过证明(2.74) 式的反向不等式：

$$\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \leqslant c_{p,q}ab, \tag{2.94}$$

式中 $1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1, 0 < m_1 \leqslant a \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant b \leqslant M_2$.

$$c_{p,q} = \max\left\{\left(\frac{1}{p}m_1^p + \frac{1}{q}M_2^q\right)/(m_1 M_2), \left(\frac{M_1^p}{p} + \frac{m_2^q}{q}\right)/(M_1 m_2)\right\}; \tag{2.95}$$

利用(2.94) 式得到反向 Hölder 不等式的积分形式：设　$0 < m_1 \leqslant f(x) \leqslant M_1, 0 < m_2 \leqslant g(x) \leqslant M_2, x \in E$，则

$$\| f \|_p \| g \|_q \leqslant c_{pq} \| fg \|_1. \tag{2.96}$$

式中 $c_{p,q}$ 由(2.95) 式给出.

见[301]1991, 161(2):566－575; 1994, 181:280－281; 1995, 196(3):795－799.

(5)　**加细 Hölder 不等式**：设　$a_k, b_k > 0, 1/p + 1/q = 1, 1 < p < \infty$，记 $p \vee q = \max\{p, q\}, p \wedge g = \min\{p, q\}$. $S_n = \dfrac{\sum\limits_k a_k^{p/2} b_k^{q/2}}{(\sum\limits_k a_k^p)^{1/2}(\sum\limits_k b_k^q)^{1/2}}$，则

$$\frac{2}{p \vee q}(1 - S_n) \leqslant 1 - \frac{\| ab \|_1}{\| a \|_p \| b \|_q} \leqslant \frac{2}{p \wedge q}(1 - S_n). \tag{2.97}$$

(2.97) 式的证明，依赖于下述 Young 不等式的加细：

$$\frac{1}{p \vee q}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leqslant \frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b-a^{1/p}b^{1/q} \leqslant \frac{1}{p \wedge q}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

(6) 对于 f,g 加上一些特殊的限制后，反向Hölder不等式和反向Minkowski不等式可以得到改进.

例如，Barnard，R. W. 将(2.88)式推广为幂权 $\omega_1(t)=t^\alpha$ 和指数权$\omega_2(t)=e^{-xt}$ 的情形，即设 $f.g$ 是$E=[0,1]$ 上非负凹函数，$\omega_1(t)=t^\alpha,\alpha>-1$，则对于$1\leqslant p<\infty$，成立

$$\| fg \|_{1,\omega_1} \geqslant c_2 \| f \|_{2,\omega_1} \| g \|_{2,\omega_1}, \tag{2.98}$$

式中 $c_2=\left(\dfrac{\alpha+1}{2(\alpha+2)}\right)^{1/2}$，仅当 $f(t)=t,g(t)=1-t$ 时等号成立，而当 $p\geqslant 1$ 时，成立

$$\int_0^1 f(t)t^\alpha \mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)B(p+1,\alpha+1)^{1/p}}\left(\int_0^1 f^p(t)t^\alpha \mathrm{d}t\right)^{1/p}, \tag{2.99}$$

仅当 $f(t)=1-t$ 时等号成立，式中 $B(u,v)$ 为 Beta 函数.

设 f,g 是$(0,\infty)$ 上非负的凹函数，$1<p<\infty,1/p+1/q=1$，则对于权 $\omega_2(t)=e^{-xt}$，成立

$$\| fg \|_{1,\omega_2} \geqslant c_{p,q} \| f \|_{p,\omega_2} \| g \|_{q,\omega_2}, \tag{2.100}$$

式中 $\| f \|_{p,\omega_2}=\left(\int_0^\infty f^p(t)e^{-xt}\mathrm{d}t\right)^{1/p}$. $c_{p,q}=\min\{\Gamma(p+1)^{1/p},\Gamma(q+1)^{1/q}\}$. $\Gamma(\alpha)$ 为 Gamma 函数. 仅当 $f(t)=1,g(t)=t$ 时等号成立.

证明的基本思路是选择适当的对称核 $K(x,t)$，将 f,g 表示为形如$\int_a^b K(x,t)f(t)\mathrm{d}t$ 的积分变换，再利用极小化过程. 我们以证明(2.98)式为例：令

$$K(x,t)=\begin{cases} x(1-t), 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1, \\ t(1-x), 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1. \end{cases} \tag{2.101}$$

并设 u,v 是$[0,1]$ 上非负可积函数，则

$$f(t)=\int_0^1 K(t,x)u(x)\mathrm{d}x, g(t)=\int_0^1 K(t,x)v(x)\mathrm{d}x \tag{2.102}$$

构成了[0.1] 上所有非负凹函数的一个稠密子集.

我们设由(2.102)式所定义的 f,g 满足正规化条件

$$\int_0^1 f^2(t)t^\alpha \mathrm{d}t=1, \int_0^1 g^2(t)t^\alpha \mathrm{d}t=1, \tag{2.103}$$

将上述 f,g 代入 $\min\int_0^1 f(t)g(t)t^\alpha \mathrm{d}t$，并利用迭核

$$K_\alpha(x,y)=\int_0^1 K(x,t)K(t,y)t^\alpha \mathrm{d}t, G_\alpha(x,y)=\frac{K_\alpha(x,y)}{(K_\alpha(x,x)K_\alpha(y,y))^{1/2}}$$

得出

$$\int_0^1 f(t)g(t)t^\alpha \mathrm{d}t \geqslant \min\{G_\alpha(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1 \sqrt{K_\alpha(x,x)}\cdot\sqrt{K_\alpha(y,y)}u(x)v(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.104}$$

于是从(2.102)式，(2.103)式及 Cauchy 不等式，得出

$$\begin{aligned}1&=\int_0^1 f^2(t)t^\alpha \mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)[\int_0^1 K(t,x)u(x)\mathrm{d}x]t^\alpha\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 u(x)[\int_0^1 K(t,x)f(t)t^\alpha\mathrm{d}t]\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1 u(x)[\int_0^1 K^2(t,x)t^\alpha\mathrm{d}t]^{1/2}[\int_0^1 f^2(t)t^\alpha\mathrm{d}t]^{1/2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 u(x)(K_\alpha(x,x))^{1/2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

同理可证 $1\leqslant\int_0^1 v(y)(K_\alpha(y,y))^{1/2}\mathrm{d}y$. 从而(2.104)式变成

$$\int_0^1 f(t)g(t)t^\alpha\mathrm{d}t\geqslant\min\{G_\alpha(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\}.$$

再证明 $\min\{G_\alpha(x,y):0\leqslant x,y\leqslant 1\}=\left(\frac{\alpha+1}{2(\alpha+2)}\right)^{1/2}$.

详见[301]1990,147(1):198－213. 1993年,Wang Hann Tzong 等进一步将(2.98)式推广为

$$\|fg\|_{1,\omega_1}\geqslant c_{p,q}\|f\|_{p,\omega_1}\|g\|_{q,\omega_1}. \tag{2.105}$$

式中 $1<p<\infty, 1/p+1/q=1$. $c_{p,q}=\min\{c_1(p,q),c_1(q,p),c_2(p,q)\}$,

$$c_1(p,q)=\frac{\sqrt[q]{\alpha+q+1}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\sqrt[p]{B(p+1,\alpha+1)}},$$

$$c_2(p,q)=\frac{B(3,\alpha+1)}{B(p+1,\alpha+1)^{1/p}B(q+1,\alpha+1)^{1/q}},$$

$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$ 为 Beta 函数. 仅当 $f(t)=t, g(t)=1-t$ 时等号成立. 见[301]1993,176(1):92－107,1998,225(2):624－629. 另见[330]1992,23(2):117－121.

1968年,Nehari,Z. 证明:设 $1<p_1<\cdots<p_n$,且 $\sum_{k=1}^n\frac{1}{p_k}=1$, $f_1,\cdots,f_n$ 是[0,1]上非负凹函数,则

$$\int_0^1\left(\prod_{k=1}^n f_k(x)\right)\mathrm{d}x\geqslant c(p_k)\prod_{k=1}^n\|f_k\|_{p_k}, \tag{2.106}$$

式中 $c(p_k)=\frac{([\frac{n}{2}]!)^2}{(n+1)!}\prod_{k=1}^n(p_k+1)^{1/p_k}$, $\|f_k\|_{p_k}=\left(\int_0^1|f_k(x)|^{p_k}\mathrm{d}x\right)^{1/p_k}$.

$[\frac{n}{2}]$ 是 $\frac{n}{2}$ 的整数部分. 仅当 $f_1,\cdots,f_n$ 中有 $[\frac{n}{2}]$ 个等于 x,其余都等于 $1-x$ 时等号成立.

(2.106)式的证明思路是对于 $t\in(0,1)$,定义

$$g(x,t)=\begin{cases}\frac{x}{t}, & 0\leqslant x\leqslant t,\\ \frac{1-x}{1-t}, & t\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\quad 和\begin{cases}g(x,0)=1-x,\\ g(x,1)=x,\end{cases}\quad x\in[0,1],$$

$\varphi(t_1,\cdots,t_n)=\int_0^1\prod_{k=1}^n g(x,t_k)\mathrm{d}x$. 则

$$\min\{\varphi(t_1,\cdots,t_n):0\leqslant t_k\leqslant 1\}=\frac{[\frac{n}{2}]!(n-[\frac{n}{2}])!}{(n+1)!}. \tag{2.107}$$

详见[301]1968,21:405 - 420,1993,180(1):117 - 121.蔡国培[345]1994.1.

(7) **Zagier 的 Cauchy 反向不等式**:设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n>0,b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$,则

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)\leqslant c_2\sum_{k=1}^n a_kb_k,\text{式中}\quad c_2=\max\left\{a_1\sum_{k=1}^n b_k,b_1\sum_{k=1}^n a_k\right\}.$$

仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 且 $b_1=\cdots=b_n$ 时等号成立.(Alzer,H.,[360]1992,58(2);157 - 159)

它的积分形式是:设 f,g 在 $[0,\infty)$ 上非负递减,则对任何可积函数 $F,G:[0,\infty)\to[0,1]$,成立

$$(f,F)(g,G)\leqslant c_2(f,g),$$

式中 $c_2=\max\left\{\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x,\int_0^\infty g(x)\mathrm{d}x\right\}.(f,g)=\int_0^\infty f(x)g(x)\mathrm{d}x.$ (见[305]1995,102(10):919 - 920).1995 年 Pecaric,J.E. 给出了它们的加权形式:设 $\{a_k\},\{b_k\},\{u_k\},\{v_k\}$ 均为递减数列,$\omega_k>0$,则

$$\left(\sum_{k=1}^n \omega_ka_ku_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \omega_kb_kv_k\right)\leqslant c_2\left(\sum_{k=1}^n \omega_ka_kb_k\right),$$

式中 $c_2=\max\left\{u_1\sum_{k=1}^n\omega_kv_k,v_1\sum_{k=1}^n\omega_ku_k\right\}$.(见[360]1995,64(5):415 - 417)

(8) 设实数 p_j 满足 $\sum_{j=1}^m\frac{1}{p_j}=\frac{1}{r},r>0,m\geqslant 2,a_{jk}>0,j=1,\cdots,m,k=1,\cdots,n$,则仅当 $\{p_j\}$ 中只有一个 $p_j>0$ 而其他 $p_k<0(\forall k\neq j)$ 时

$$\prod_{j=1}^m\|a_{jk}\|_{p_j}\leqslant\left\|\prod_{j=1}^m a_{jk}\right\|_r. \tag{2.108}$$

仅当 $\frac{a_{i1}^{p_i}}{a_{j1}^{p_j}}=\frac{a_{i2}^{p_i}}{a_{j2}^{p_j}}=\cdots=\frac{a_{in}^{p_i}}{a_{jn}^{p_j}}(i,j=1,\cdots,m)$ 时,(2.108) 式中等号成立.

(Sun Xie Hua(孙燮华),[357]1997,23(2):241 - 252)

(9) 1948 年,Toyama,H. 给出反向 Minkowski 不等式:设 $a_{jk}\geqslant 0$,但不全为零,$0<r<s$,则

$$\frac{\left[\sum_{k=1}^n\left(\sum_{j=1}^m a_{jk}^s\right)^{r/s}\right]^{1/r}}{\left[\sum_{j=1}^m\left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^r\right)^{s/r}\right]^{1/s}}\leqslant(\min\{m,n\})^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}. \tag{2.109}$$

上界是最佳的,2000 年 Alzer,H. 等给出了(2.109) 式的加权形式,见[358]2000,216(1 - 3):253 - 256.

12. **抽象测度空间 $(X,\sum,\mu)$ 上 Hölder 不等式与 Minkouski 不等式的改进和推广:**

(1) 设 $(X,\sum_1,\mu_1)$ 和 $(Y,\sum_2,\mu_2)$ 是两个 σ 有限的测度空间,$\mu(X)=1$,f 是 X

$\times Y$ 上正的可测函数,则

$$\int_Y \exp\left(\int_X \ln f \mathrm{d}\mu_1\right)\mathrm{d}\mu_2 \leqslant \exp\left\{\int_X \ln\left(\int_Y f \mathrm{d}\mu_2\right)\mathrm{d}\mu_1\right\}. \tag{2.110}$$

(Kwon, E. G., [359]1995, 51(3): 369 - 375)

(2) 设$(X,\sum,\mu)$为测度空间,$A,B\in\sum$且$0<\mu(A)<1<\mu(B)$,$f_k:(0,\infty)\to(0,\infty)$为任意双射函数. $\varphi: X\to R$ 为非负可积的简单函数,它构成的线性空间记为S_+,$E=\{x\in X:\varphi(x)\neq 0\}$,记

$$p_f(\varphi)=\begin{cases} f^{-1}\left(\int_E f\circ|\varphi|\mathrm{d}\mu\right), & \mu(E)>0,\\ 0, & \mu(E)=0.\end{cases}$$

若 $$\int_X\left(\prod_{k=1}^n \varphi_k\right)\mathrm{d}\mu \leqslant \prod_{k=1}^n p_{f_k}(\varphi_k),\ \forall \varphi_k\in S_+, \tag{2.111}$$

则 f_k 必为共轭幂函数,即 $f_k(x)=c_k x^{q_k}, x>0, c_k$ 为常数,且$\sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k}=1$.

(2.111) 式的证明思路主要依赖于下述结果:

设 $f:(0,\infty)\to(0,\infty), 0<a<1<a+b, a<b$ 且

$af(x)+bf(y)\leqslant f(ax+by), x,y>0$,则 $f(x)=cx$.

(Mathowski, [362]1997, 50(1 - 2): 135 - 143)

Mathowski 在 1994 年还证明了下述 Minkowski 不等式:若 f^{-1} 在 0 点连续,且

$$p_f(\varphi_1+\varphi_2)\leqslant p_f(\varphi_1)+p_f(\varphi_2), \varphi_1,\varphi_1\in S_+. \tag{2.112}$$

则当 $1\leqslant q<\infty$ 时,$f(x)=f(1)x^q, x\geqslant 0$;而当 $0<q\leqslant 1$,且(2.112)式中不等号反向时,$f(x)=f(1)x^q$. 作者还进一步证明了下述广义 **Hölder-Minkowski 不等式**:

$$h\left(\frac{\int_E f\mathrm{d}\mu}{\int_E g\mathrm{d}\mu}\right)\int_E g\mathrm{d}\mu \leqslant \int_E\left[h\circ\left(\frac{f}{g}\right)\right]g\mathrm{d}\mu, \tag{2.113}$$

式中 $h:(0,\infty)\to R^1$ 为凸函数,非负函数 $f,g\in L(E), E\in\sum,\mu(E)>0$,若 h 为凹函数,则不等号反向,特别当 $h(t)=t^{1/p}$ 时得 Hölder 不等式,当 $h(t)=(t^{1/p}+1)^p$ 时得到 Minkowski 不等式. 这是因为当 $0<p<1$ 时 h 为凸函数,$1<p<\infty$ 时 h 为凹函数.

(2.113) 式的证明思路是:定义测度 $v:\sum\to[0,\infty]$ 为

$$v(A)=\frac{\int_A g\mathrm{d}\mu}{\int_E g\mathrm{d}\mu}, A\subset E,$$

则$(E,\sum,v)$为正规化的测度空间,且 $f/g\in L(v)$,由凸函数的 Jensen 积分不等式,得到

$$h\left(\int_E \frac{f}{g}\mathrm{d}v\right)\leqslant \int_E h\circ\left(\frac{f}{g}\right)\mathrm{d}v.$$

再将 $\mathrm{d}v$ 的表达式代入即得(2.113)式.(见[329]1994, 109(2): 171 - 182. 进一步的改进见[302]1999, 3(2): 127 - 135)

(3) 设 f,g 是 R^1 上有紧支集的非负连续函数,$1<p<\infty,1/p+1/q=1$,则

$$\sup_x\int f(x-y)g(y)\mathrm{d}y \leqslant \|f\|_p\|g\|_q \leqslant \int \sup_y\{f(x-y)g(y)\}\mathrm{d}x. \tag{2.114}$$

1972 年 Leindler,L. 证明了一个更强的结果:

$$\int \sup_y\{f(x-y)g(y)\}\mathrm{d}x \geqslant p^{1/p}q^{1/q}\|f\|_p\|g\|_q.$$

当 f 是$[0,1/p]$的特征函数而 g 是$[0,1/q]$的特征函数时等号成立,见[369]1972,33:217－223,或[305](1991)98:650－652.

(4) **Hölder 不等式的对数推广**:设 $0\leqslant a<1,b,c>0,\beta=b+c,\delta=\beta[\frac{1}{1-a}+\frac{1}{c}]$,定义 $f,g:[1,\infty)\to R^1$ 为:$f(x)=x^a(\log x)^b;g(y)=y^{1-b}(\delta+\log y)^{-\beta}$,再定义 $H:[1,\infty)\times[1,\infty)\to R^1$ 为:

$$H(x,y)=\begin{cases} f(x)g(y), & x\geqslant 1,1\leqslant y\leqslant \dfrac{x^{\beta/b}}{e^{\delta}},\\ \dfrac{b^bc^c}{\beta^\beta}x^ay^{1-a}(\delta+\dfrac{1}{x}\log y)^{-c}, & x\geqslant 1,y\geqslant p,\end{cases}$$

式中 $p=\max\{1,e^{-\delta}x^{\beta/b}\}$,若$(X,\mu)$为概率空间,$\varphi,\psi:X\to[1,\infty)$,则

$$\int_X(f\circ\varphi)(g\circ\psi)\mathrm{d}\mu\leqslant H(\int_X\varphi\mathrm{d}\mu,\int_X\psi\mathrm{d}\mu).$$

见 Ginibre,J. 等[302]1999,3(4):389－400.

(5) **Hölder 不等式的Rado 型推广**:设 μ 为空间X 上正测度,$\mu(X)\neq 0$,f_k 是X 上正的 μ 可积函数,$q_k>0,Q_k=\sum_{j=1}^k q_j,Q_n=1,p_j=\frac{q_j}{Q_k},k<n.,1<r<\infty$,则

$$1-\frac{\int_X(\prod_{j=1}^n f_j^{q_j})^r\mathrm{d}\mu}{\prod_{k=1}^n(\int_X f_k^r\mathrm{d}\mu)^{q_k}}\geqslant\frac{k}{n}\left\{1-\frac{\int_X(\prod_{j=1}^k f_j^{p_j})^r\mathrm{d}\mu}{\prod_{j=1}^k(\int_X f_j^r\mathrm{d}\mu)^{p_j}}\right\}.$$

(Kwon,Ern Gun 等 J. Korea Soc,Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math,2000,7(1):1－6)

四、 若干重要的推论

1. 设 $a=\{a_k\}$ 为实数列或复数列,令(见(2.2)式):

$$\|a\|_p=(\sum_{k=1}^\infty|a_k|^p)^{1/p}.0<p<\infty,\ \|a\|_\infty=\sup_k|a_k|:$$

则数列空间 l^p 定义为:

$$l^p=\{a=(a_1,\cdots,a_n,\cdots):\|a\|_p<\infty\}.$$

$$c=\{a=(a_1,\cdots,a_n,\cdots):\lim_{n\to\infty}x_n\ 存在(有限)\}.$$

若 $1<p_1<p_2<\infty$,则

$$l^1\subset l^{p_1}\subset l^{p_2}\subset c\subset l^\infty. \tag{2.115}$$

而且存在常数 α,使得 $\|a\|_{p_2}\leqslant\alpha\|a\|_{p_1}$,

$$\lim_{p\to\infty}\|a\|_p=\|a\|_\infty. \tag{2.116}$$

证　(1)　设 $a=\{a_n\}\in l^{p_1}$,则 $\|a\|_{p_1}^{p_1}=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{p_1}<\infty$,由级数收敛的必要性,$\lim_{n\to\infty}a_n=0$,从而 $\exists\, n_0$,使得 $\forall\, n>n_0$ 时,$|a_n|\leqslant 1$.从而 $|a_n|^{p_2}\leqslant|a_n|^{p_1}$.于是

$$\|a\|_{p_2}^{p_2}\leqslant\sum_{k=1}^{n_0}|a_k|^{p_2}+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|a_k|^{p_1}<\infty, a\in l^{p_2}.\text{这表明 } l^{p_1}\subset l^{p_2}.$$

(2)　若 $a\in l^{p_0}$,则 $\forall\, p\geqslant p_0, a\in l^p$,因为 $|a_n|\to 0(n\to\infty)$,则存在 $|a_k|$ 的最大值,记为 $|a_{k_0}|$,于是 $\|a\|_\infty=|a_{k_0}|$.又因为 $\left|\frac{a_k}{a_{k_0}}\right|\leqslant 1$,所以,$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k_0}}\right|^p$ 当 $p\to\infty$ 时递减(从而有界)记为 $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k_0}}\right|^p\leqslant M$. $\|a\|_p^p=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p=\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k_0}}\right|^p|a_{k_0}|^p\leqslant M|a_{k_0}|^p=M\|a\|_\infty^p$,

所以从 $\|a\|_\infty=|a_{k_0}|\leqslant\|a\|_p\leqslant\sqrt[p]{M}\|a\|_\infty$ 和 $\sqrt[p]{M}\to 1(p\to\infty)$,得出(2.116)式.

2.　设 $(X,\sum,\mu)$ 为测度空间,$E\in\sum$,$\mu(E)<\infty$,$1\leqslant p_1<p_2\leqslant\infty$,则

(1)　$C(E)\subset L^\infty(E)\subset L^{p_2}(E)\subset L^{p_1}(E)\subset L(E)$;　(2.117)

(2)　$\|f\|_{p_1}\leqslant c(p_1,p_2)\|f\|_{p_2}$.　(2.118)

式中　$c(p_1,p_2)=\begin{cases}(\mu(E))^{(1/p_1-1/p_2)}, & p_2<\infty,\\ (\mu(E))^{(1/p_1)}, & p_2=\infty.\end{cases}$

(3)　$\lim_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.　(2.119)

证　设 $1<p_1<p_2<\infty$,由 Hölder 不等式有

$$\|f\|_{p_1}^{p_1}=\int_E|f|^{p_1}\mathrm{d}\mu\leqslant\left(\int_E(|f|^{p_1})^{p_2/p_1}\mathrm{d}\mu\right)^{p_1/p_2}\left(\int_E\mathrm{d}\mu\right)^{1-p^1/p_2}$$

$$=\|f\|_{p_2}^{p_1}(\mu(E))^{1-p^1/p_2}.$$ 两边开 p_1 次方即得(2.118)式.

为证(2.119)式,$\forall\, A\subset E$,$\mu(A)=0$,有

$$\|f\|_p^p=\int_E|f|^p\mathrm{d}\mu=\int_{E-A}|f|^p\mathrm{d}\mu\leqslant(\sup_{x\in E-A}|f(x)|^p)\mu(E-A),$$

两边对 $\forall\, A\subset E$ 取下确界,得 $\|f\|_p^p\leqslant\|f\|_\infty^p\mu(E)$.于是

$$\operatorname*{linsup}_{p\to\infty}\|f\|_p\leqslant\|f\|_\infty\lim_{p\to\infty}(\mu(E))^{1/p}=\|f\|_\infty. \tag{2.120}$$

另一方面,令　$B=\{x\in E:|f(x)|>\|f\|_\infty-\varepsilon\}$.则 $\mu(B)>0$,且

$$\|f\|_p\geqslant\left(\int_B|f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\geqslant(\|f\|_\infty-\varepsilon)(\mu(B))^{1/p},$$

于是,$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p\geqslant\|f\|_\infty-\varepsilon$,由 $\varepsilon>0$ 的任意性,得

$$\liminf_{p\to\infty}\|f\|_p\geqslant\|f\|_\infty. \tag{2.121}$$

从(2.120)式,(2.121)式得(2.119)式.

注　(2.115)式中的包含关系正好与(2.117)式相反.而且当 $\mu(E)=\infty$ 时,(2.117)式不成立.

3. 设$(X,\sum,\mu)$为测度空间,$E\in\sum$,若$f,g\in L^q(E)$,$0<q<\infty$,则当$p\geqslant q>0$时,

$$(\|f\|_q^p+\|g\|_q^p)^{1/p}\leqslant\|(|f|^p+|g|^p)^{1/p}\|_q;\tag{2.122}$$

而当$0<p\leqslant q$时,不等号反向.

若z为复数,且$|z|=1$,则当$1\leqslant p\leqslant q\leqslant 2$时,

$$\|f+zg\|_q^p+\|f-zg\|_q^p\geqslant|(\|f\|_q+z\|g\|_q)|^p+|(\|f\|_q-z\|g\|_q)|^p,\tag{2.123}$$

若$2\leqslant q\leqslant p<\infty$,则不等号反向.

若$0<p<1$,$p\leqslant q\leqslant 2$,$|\mathrm{Re}z|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2-p}}$,则(2.123)式成立.

(Pavlovic, M., [301] 1996, 202: 160 - 168)

4. 设$0<p,q<\infty$,$f\in L^p(E)\cap L^q(E)$,则$\forall r:p<r<q$,有$f\in L^r(E)$,且成立 **Lyapunov 不等式**:

$$\|f\|_r\leqslant\|f\|_p^{1-\alpha}\|f\|_q^{\alpha},\tag{2.124}$$

式中$0<\alpha<1$由$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1-\alpha}{p}+\dfrac{\alpha}{q}$确定.

证 令$p_1=\dfrac{p}{(1-\alpha)r}$,$q_1=\dfrac{q}{\alpha r}$,则$\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{q_1}=1$,$q_1>1$. 由 Hölder 不等式,有

$$\|f\|_r^r=\int_E|f|^r=\int_E|f|^{r\alpha}\cdot|f|^{(1-\alpha)r}\leqslant(\int_E|f|^{r\alpha q_1})^{1/q_1}(\int_E|f|^{(1-\alpha)rp_1})^{1/p_1}$$

$$=[(\int_E|f|^q)^{1/q}]^{\alpha r}[(\int_E|f|^p)^{1/p}]^{(1-\alpha)r}=\|f\|_q^{\alpha r}\|f\|_p^{(1-\alpha)r}.$$

两边开r次方即得(2.124)式.

推论 1 设$f\in L^p(E)\cap L^\infty(E)$,$0<p<\infty$,则对于$p<q<\infty$,有$f\in L^q(E)$,且

$$\|f\|_q\leqslant\|f\|_q^{p/q}\|f\|_\infty^{1-p/q}.\tag{2.125}$$

推论 2 设$0<p<r<q\leqslant\infty$,$f\in L^p(E)\cap L^q(E)$. 则$f\in L^r(E)$,且

$$\|f\|_r\leqslant\max\{\|f\|_p,\|g\|_q\}.\tag{2.126}$$

5. 设$1\leqslant p\leqslant r\leqslant q<\infty$,$f\in L^p(E)\cap L^q(E)$,则

$$\|f\|_r^r\leqslant\|f\|_p^p+\|f\|_q^q.\tag{2.127}$$

证 令$A=\{x\in E:|f(x)|\leqslant 1\}$,$B=\{x\in E:|f(x)|>1\}$. 则$E=A\cup B$,而且

$$\|f\|_r^r=\int_A|f|^r\mathrm{d}\mu+\int_B|f|^r\mathrm{d}\mu\leqslant\int_A|f|^p\mathrm{d}\mu+\int_B|f|^q\mathrm{d}\mu\leqslant\|f\|_p^p+\|f\|_q^q.$$

注 (2.124)式说明$\|f\|_p$是$1/p$的对数凸函数.

利用 Hölder 不等式还可证明. $\|f\|_p^p$是p的对数凸函数,这是因为设$0\leqslant\alpha\leqslant 1$,$r=\alpha p+(1-\alpha)q$,则

$$\|f\|_r^r=\int_E|f|^r\mathrm{d}\mu=\int_E|f|^{\alpha p}\cdot\int_E|f|^{(1-\alpha)q}\mathrm{d}\mu\leqslant$$

$$\leqslant(\int_E|f|^p\mathrm{d}\mu)^\alpha(\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu)^{1-\alpha}=\|f\|_p^{\alpha p}\|f\|_q^{(1-\alpha)q}.$$

6. 设 $\mu(E)=1, f\in L^p(E), p>0$,则对于 $0<q<p$.有 $f\in L^q(E)$,而且

(1) $\int_E(\log|f|)\mathrm{d}\mu \leqslant \log\|f\|_q \leqslant \frac{1}{q}(\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu-1)$, (2.128)

(2) $\lim\limits_{q\to 0}\frac{1}{q}(\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu-1)=\int_E(\log|f|\,\mathrm{d}\mu)$. (2.129)

(3) $\lim\limits_{q\to 0}\|f\|_q=\exp(\int_E(\log|f|)\mathrm{d}\mu)$. (2.130)

提示:利用第 7 章 Jensen 不等式和(2.118)式.有

$$\exp\left(\int_E(\log|f|)\mathrm{d}\mu\right)\leqslant\int_E\exp(\log|f|)\mathrm{d}\mu=\|f\|_1\leqslant(\mu(E))^{1-\frac{1}{q}}\|f\|_q.$$

注意到 $\mu(E)=1$,即得(2.128)式左边不等式.

利用初等不等式 $\log t\leqslant t-1,(0<t<\infty)$,用 $t=\frac{|f|^q}{\|f\|_q^q}$ 代入并在 E 上积分,得

$$\int_E(\log|f|^q-\log\|f\|_q^q)\mathrm{d}\mu\leqslant\frac{1}{\|f\|_q^q}\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu-\mu(E)=0.$$

即 $\int_E(\log|f|\,\mathrm{d}\mu)\leqslant\log\|f\|_q$. (2.131)

另一方面,当 $q\to+0$ 时,$\frac{|f|^q-1}{q}$ 递减趋于 $\log|f|$,又 $\frac{1}{p}(|f|^p-1)\in L(E)$.由 Levi 单调收敛定理.

$$\lim_{q\to 0}\frac{1}{q}(\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu-1)=\lim_{q\to 0}\int_E(\frac{|f|^q-1}{q})\mathrm{d}\mu=\int_E\log|f|\,\mathrm{d}\mu.$$

所以,

$$\int_E\log|f|\,\mathrm{d}\mu=\lim_{q\to 0}\frac{1}{q}(\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu-1)$$
$$\geqslant\limsup_{q\to 0}\frac{1}{q}\log(\int_E|f|^q\mathrm{d}\mu)=\limsup_{q\to 0}\log\|f\|_q. \quad (2.132)$$

从(2.131)式和(2.132)式即可推出(2.129)式,(2.130)式.

7. **函数的积分平均不等式**:设 $0<\mu(E)<\infty, 1\leqslant p<\infty$,记

$$N_p(f)=(\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f|^p\mathrm{d}\mu)^{1/p}. \quad (2.133)$$

$N_p(f)$ 称为 f 关于集合 E 和指数 p 的平均值,它除了满足 Hölder 不等式和 Minkowski 不等式以外,还有关于 p 递增等优点,即

(1) **Hölder 不等式**:$N_1(fg)\leqslant N_p(f)N_q(g)$;式中$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, 1<p<\infty$.

(2) **Minkowski 不等式**:$N_p(f+g)\leqslant N_p(f)+N_p(g), 1\leqslant p<\infty$;

(3) $\lim\limits_{p\to\infty}N_p(f)=\|f\|_\infty$;

(4) $N_p(f)$ 关于 p 递增:$1\leqslant p_1\leqslant p_2\Rightarrow N_{p_1}(f)\leqslant N_{p_2}(f)$;

(5) $N_p(f)$ 关于积分区域 E 递增,即设 $E_1\subset E_2$,则

$$(\frac{1}{\mu(E_1)}\int_{E_1}|f|^p\mathrm{d}\mu)^{1/p}\leqslant(\frac{1}{\mu(E_2)}\int_{E_2}|f|^p\mathrm{d}\mu)^{1/p}.$$

(6)　$(N_p(f))^p$ 为 p 的对数凸函数,即 $\log(N_p(f))^p$ 为凸函数;$N_p(f)$ 是 $1/p$ 的对数凸函数,这是因为

$$N_r(f) \leqslant (N_p(f))^{1-\alpha}(N_q(f))^{\alpha}, \tag{2.134}$$

式中　$0 < \alpha < 1$ 由 $1/r = (1-\alpha)/p + \alpha/q$ 确定.

注　我们可以进一步考虑 f 关于 E 和 p 的加权平均:

$$N_{p,\omega}(f) = \left(\frac{1}{\omega(E)}\int_E |f|^p \omega \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}, \tag{2.135}$$

式中　$\omega(E) = \int_E \omega(x)\mathrm{d}\mu, \omega(x) > 0$,a.e.于 $x \in E$.它与 $N_p(f)$ 有类似的性质.