第六章　多项式不等式

本章所讨论的多项式,包括代数多项式(记为 $P_n(x)$)和三角多项式(记为 $T_n(x)$).它们可通过下述换元和周期延拓的方式相互转化:设 f 是$[a,b]$上连续函数,称为原始函数.令

$$x=\frac{1}{2}[(b-a)t+(b+a)],\varphi(t)=f(\frac{1}{2}[(b-a)t+(b+a)]).$$

则 φ 是$[-1,1]$上连续函数,再令 $t=\cos\theta,g(\theta)=\varphi(\cos\theta)$,于是按 $g(\theta)=g(-\theta)$,$g(\theta)=g(\theta+2\pi)$,就可将 $g(\theta)$ 延拓成$(-\infty,\infty)$上偶的以 2π 为周期的函数,$g(\theta)$ 称为 f 的**诱导函数**.从而代数多项式不等式可以转化为相应的三角多项式不等式.反之亦然.但为了读者查阅方便,我们还是将它们分别论述.本章介绍的经典正交多项式,在数学物理方程,特殊函数理论,数值分析以至工程技术上都占有十分重要的地位.

本章还包括多项式的导数和积分不等式,多项式逼近不等式等.

§1　一般代数多项式不等式

1.　[MCM].设对于任意实数 $x,P_2(x)=ax^2+2bx+c\geqslant 0,Q_2(x)=px^2+2qx+r\geqslant 0$,其中 a,b,c,p,q,r 都是实数,则对任何实数 x,都有

$$apx^2+2bqx+cr\geqslant 0.\tag{1.1}$$

提示:在证明中用到以下定理:

对于所有实数 $x,P_2(x)=ax^2+2bx+c\geqslant 0$ 的充要条件是 $a\geqslant 0,c\geqslant 0,ac-b^2\geqslant 0$,从而可推出 $ap\cdot cr-(bq)^2\geqslant 0$,于是(1.1)式即可得证.

推广:设 $P_2(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$,则对于所有实数 $x,y,P_2(x,y)>0$ 的充要条件是:

(1)　$a>0,\quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}>0;$

或(2)　$a>0,\quad \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a & d \\ d & f \end{vmatrix}>0;$

或(3) $a=b=d=0,c>0,\begin{vmatrix} c & e \\ e & f \end{vmatrix}>0;$

或(4) $a=b=c=d=e=0,f>0.$

2.　**抛物线不等式**:设 $P_2(x)=ax^2+bx+c$,记 $M=(4ac-b^2)/(4b)$.则当 $a>0$ 时,$P_2(x)\geqslant M$;当 $a<0$ 时,不等号反向,仅当 $x=-b/(2a)$ 时等号成立.

若把 $P_2(x)$ 限制在有限区间$[\alpha,\beta]$上,则 $a>0$ 时,$M\leqslant P_2(x)\leqslant\max\{P_2(\alpha),$

$P_2(\beta)\}$，而当 $a<0$ 时，$\min\{P_2(\alpha),P_2(\beta)\}\leqslant P_2(x)\leqslant M$.

设 f 是$[\alpha,\beta]$上的连续函数，$f(\alpha)=f(\beta)=0$，$f(x_0)>0\quad(a<x_0<b)$，则存在抛物线 $P_2(x)=ax^2+bx+c\quad(a<0)$ 和 $y\in(\alpha,\beta)$，使得对于$[\alpha,\beta]$中所有 x，都有 $P_2(x)\geqslant f(x)$，$P_2(y)=f(y)$.

这些抛物线不等式看来简单，却很有用．不但可用于证明较难的初等不等式，包括数学竞赛题，还是函数逼近论中著名的抛物线技巧．下面是全苏联数学奥林匹克试题：

(1) 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=a+bx+cx^2$，若当 $|x|\leqslant 1$ 时 $|f(x)|\leqslant 1$，则 $|g(x)|\leqslant 2$.

证　因为 $f(1)=g(1)$，$f(-1)=g(-1)$，则

$|g(1)|\leqslant 1$，$|g(-1)|\leqslant 1$，$|c|=|f(0)|\leqslant 1$.

为证 $|g(x)|\leqslant 2$，我们用反证法，设存在 x_0，$|x_0|\leqslant 1$，使得 $|g(x_0)|>2$．则抛物线 $y=g(x)$ 的顶点坐标为$(x_0,g(x_0))$，于是 $g(x)=c(x-x_0)^2+g(x_0)$．但由于 $|1-x_0|\leqslant 1$，从而，$|g(x_0)|=|g(1)-c(1-x_0)^2|\leqslant|g(1)|+|c|\leqslant 2$．与假设矛盾．证毕．

(2)　设 $f(x)=ax^2+bx+c$ 中，系数 a,b,c 都为正数且 $a+b+c=1$，则对于任意 n 个正数 x_k 满足 $\prod\limits_{k=1}^{n}x_k=1$ 时，都有 $\prod\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\geqslant 1$.

提示：先证对于任意正数 x_1,x_2，有　$f(x_1)f(x_2)\geqslant(f(\sqrt{x_1x_2}))^2$.

若 $n=2^m$，则逐次利用上式得到

$$\prod_{k=1}^{n}f(x_k)\geqslant[f(\sqrt{x_1x_2})f(\sqrt{x_3x_4})\cdots f(\sqrt{x_{n-1}x_n})]^2\geqslant\cdots\geqslant(f\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}))^n$$
$$=[f(1)]^n=1.$$

若 $n\neq 2^m$，则在$\{x_1,\cdots,x_n\}$中补入若干个数 1，使得数组中数的个数恰好为 2^m，注意利用 $f(1)=1$ 即可得证．(1990 年 24 届全苏联奥林匹克试题)．

抛物线技巧可作如下推广：设 $f\in C[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，若 $\exists\, x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>0$，则存在 $g(x)=c_2u_2(x)+c_0$，$(c_0<0)$ 和某个 $y\in(a,b)$，使得 $g(y)=f(y)$，且 $g(x)\geqslant f(x)$，$x\in[a,b]$．式中 $u_2(x)$ 定义如下：设 $q_1(t)$，$q_2(t)$ 是$[a,b]$上严格正值的连续可微函数，令 $Q_2(x)=\int_a^x q_2(t)\mathrm{d}t$，$u_1(x)=\int_a^x q_1(t)\mathrm{d}t$，$u_2(x)=\int_a^x q_1(t)Q_2(t)\mathrm{d}t$，于是可用$\{1,u_1(x),u_2(x)\}$代替$\{1,x,x^2\}$．(见[81]P350－353)

3.　[MCM]．**三次抛物线不等式：**设 $P_3(x)=\sum\limits_{k=0}^{3}a_kx^k$，$Q_3(x)=\sum\limits_{k=0}^{3}b_kx^k$，若 $P_3(-1)=-1$，$P_3(1)=1$，$P_3(x)$ 在开区间$(-1,1)$上取得最小值 -1 和最大值 1，而 $|Q_3(x)|<1$，$\forall\, x\in(-1,1)$，则对所有 $|x|>1$，有 $|Q_3(x)|<|P_3(x)|$．(见[348]1991，9:35)

4.　设 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k\quad(x\in[a,b])$ 为 n 次实系数多项式．令

$$\|P_n\|=\max\{|P_n(x)|:a\leqslant x\leqslant b\},\ L(P_n)=\sum_{k=0}^{n}|a_k|,\ H(P_n)=\max\{|a_0|,$$

$|a_1|,\cdots,|a_n|\}$，$G(P_n)=\max\{1,\sum\limits_{j=0}^{n-1}|a_j|\}$，则：

(1) 存在正常数 C_1,C_2，使得对所有 $P_n(x)$，成立

$$\|P_n\|\leqslant C_1L(P_n),\quad L(P_n)\leqslant C_2\|P_n\|.$$

证 令 $C_1=\max\{1,|x|,|x|^2,\cdots,|x|^n\}$，则对于所有 $x\in[a,b]$，有 $|P_n(x)|\leqslant\sum|a_k||x|^k\leqslant C_1L(P_n)$，从而 $\|P_n\|\leqslant C_1L(P_n)$.

在区间$[a,b]$上任意固定 $n+1$ 个点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则方程组 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx_j^k=P_n(x_j)$，$(j=0,1,\cdots,n)$ 的系数行列式 D 是 Vandermonde 行列式，$D\neq0$，所以 $a_k=D_k/D$，$k=0,1,\cdots,n$. 式中 D_k 是把D 中第k 列换成常数项$P_n(x_j)(j=0,1,\cdots,n)$的行列式. 将行列式 D_k 展开后，上式可写成 $a_k=\sum\limits_{j=0}^{n}\beta_{x_j}^{(k)}P_n(x_j)$，从而 $|a_k|\leqslant\sum\limits_{j=0}^{n}|\beta_{x_j}^{(k)}|\times\|P_n\|$，上式对 k 求和，并令 $C_2=\sum\limits_{k=0}^{n}(\sum\limits_{j=0}^{n}|\beta_{x_j}^{(k)}|)$ 即可证得 $L(P_n)\leqslant C_2\|P_n\|$.

(2) 当 $a\geqslant3$ 时，$|a^k-P_n(k)|(k=0,1,\cdots,n+1)$ 中至少有一个不小于 1. 提示：用数学归纳法. 详见[345]1982,3:33－34.

(3) 设$[a,b]=[-1,1]$，$a_k=1\quad(k\leqslant n)$，则

① $$\|P_n\|\geqslant\begin{cases}2^{-(k-1)}\dfrac{k!}{n}\dfrac{(\frac{n-k}{2})!}{(\frac{n+k}{2}-1)!} & (\text{若 } n \text{ 与} k \text{ 的奇偶性相同}),\\[2ex] 2^{-(k-1)}\dfrac{k!}{(n-1)}\dfrac{(\frac{n-k-1}{2})!}{(\frac{n+k-3}{2})!} & (\text{若 } n \text{ 与} k \text{ 的奇偶性相反}).\end{cases}$$

特别，若 $k=n$，则得 **Chebyshev 不等式**：

$$\|P_n\|\geqslant\frac{|a_n|}{2^{n-1}}.$$

注 上述不等式可改进为

$$\max_{x\in[-1,1]}|P_n(x)|^2-\min_{x\in[-1,1]}|P_n(x)|^2\geqslant\frac{|a_n|^2}{2^{n-2}}.$$

② **Markov 不等式**：

$$|a_k|\leqslant\begin{cases}2^{(k-1)}\cdot\dfrac{n}{k!}\cdot\dfrac{(\frac{n+k}{2}-1)!}{(\frac{n-k}{2})!}\|P_n\|, & \text{若 } n-k \text{ 为偶数}.\\[2ex] 2^{(k-1)}\cdot\dfrac{(n-1)}{k!}\cdot\dfrac{(\frac{n+k-3}{2})!}{(\frac{n-k-1}{2})!}\|P_n\|, & \text{若 } n-k \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

证明见[60]上册 P.60. 特别地，$|a_n|\leqslant2^{n-1}\|P_n\|$；$|a_{n-1}|\leqslant2^{n-2}\|P_n\|$.

1978 年，Reimer, M. 将 Markov 不等式推广到多元多项式：

$P_m^r(x)=\sum\limits_{|k|\leqslant m}b_kx^k,b_k\in R^1,x=(x_1,\cdots,x_r)\in R^r.k=(k_1,\cdots,k_r)$为非负整数组，$x^k=x_1^{k_1}\cdots x_r^{k_r},|k|=k_1+\cdots+k_r,D=[-1,1]$，令 $\|P_m^r\|=\max\{|P_m^r(x)|:x\in D^r\}$.

(i) 若 $|k|=m$，且 $\|P_m^r\|\leqslant 1$，则

$$|b_k|\leqslant 2^{m-\bar{r}}.$$

式中 $\bar{r}$ 表示 k 的非零分量的数目. 证明见[327]1978,23(1):65－69.

(ii) $\left|\sum\limits_{|k|=m}b_k\right|\leqslant 2^{m-1}\|P_m^r\|$，$\left|\sum\limits_{|k|=m-1}b_k\right|\leqslant 2^{m-2}\|P_m^r\|\quad(m\geqslant 2)$.

证明见[327]1982,35(1):94.

(4) 若 $|P_{n-1}(x)|\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(-1\leqslant x\leqslant 1)$，则

$|P_{n-1}(x)|\leqslant n$.

提示：利用 Lagrange 插值公式.

(5) 设 n 为奇数，$a_n=1$，则当 $x>G(P_n)$ 时，$P_n(x)>0$，而当 $x<-G(P_n)$ 时，$P_n(x)<0$.

证 1 当 $x>G(P_n)$ 时，$P_n(x)\geqslant x^n-(\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|x^k)\geqslant x^{n-1}(x-\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|)>0$，将 x 换成 $-x$，可类似证明第二个不等式.

证 2 $P_n(x)$ 在区间$[-G(P_n),G(P_n)]$上连续，又 n 为奇数，所以 $P_n(x)$ 的实根必全部位于区间$[-G(P_n),G(P_n)]$之内.

(6) 令$[P_n(x)]^2=\sum\limits_{k=0}^{2n}b_kx^k$，且 $0\leqslant a_k\leqslant a_0,k=1,\cdots,n$，则

$b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}[P_n(1)]^2$.

证 由多项式乘法，得 $b_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_ka_{n-k+1}$，$P_n(1)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$. 从条件得

$\frac{1}{2}[P_n(1)]^2=\frac{1}{2}(\sum\limits_{k=0}^{n}a_k^2+2\sum\limits_{0\leqslant k<j\leqslant n}a_ka_j)\geqslant\sum\limits_{0\leqslant k<j\leqslant n}a_ka_j\geqslant a_0(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k)\geqslant b_{n+1}$.

(7) 设$[a,b]=[0,1]$，$b_k=\sum\limits_{j=1}^{n}a_j\binom{k}{j}\binom{n}{j}^{-1}$，$k=0,1,\cdots,n$，则

$\min\{b_k:0\leqslant k\leqslant n\}\leqslant P_n(x)\leqslant\max\{b_k:0\leqslant k\leqslant n\}$ (**Cargo 不等式，1966**).

(8) 设 $P_n(x)$ 的所有根 x_k 都满足 $|x_k|<1$，$k=1,2,\cdots,n$，$a_n\neq 0$，则

$$\sum_{k=0}^{n}k|a_k|^2>(n/2)\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2.$$

证明见[305]1962,69:670.

5. 设 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$，$a_0=1$，若 $P_n(x)=0$ 的根为 $x_1,\cdots,x_n$，则有

(1) **Walsh 不等式：** $|x_j|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|^{1/k}$，$j=1,\cdots,n$.

(2)　$|x_j| < (1 + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2)^{1/2}$; $\prod (1 + |x_j|) \leqslant 2^n \cdot \sqrt{n+1} H(P_n)$,

式中 $H(P_n) = \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_n|\}$.

(3)　$|x_j| < (1 + |a_1 - 1|^2 + |a_2 - a_1|^2 + |a_n - a_{n-1}|^2 + |a_n|^2)^{1/2}$,

(4)　若 $x_k > 0, k = 1, \cdots, n$,则

$$\frac{a_1 a_{n-1}}{a_0 a_n} \geqslant n^2.$$

(5)　设 $R = ((\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|)/|a_n|), a_n \neq 0$,则方程 $P_n(x) = 0$ 的所有根都满足

$$|x_k| \leqslant \max\{R, \sqrt[n]{R}\}, k = 1, \cdots, n.$$

6.　设 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad (x \in [-1,1])$ 为 n 次实系数多项式.

(1)　若$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2 \mathrm{d}x = 1$,　则对于 $-1 \leqslant x \leqslant 1$,有 $|P_n(x)| \leqslant (n+1)/\sqrt{2}$.

仅当 $P_n(x) = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} S_n(x)$ 且 $x = 1$;或 $P_n(x) = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{n+1} S_n(-x)$ 且 $x = -1$ $(n > 0)$ 时等号成立. $S_n(x)$ 可表为 Legendre 多项式的线性组合. 见[56]Vol. 2. P. 110.

(2)　设 $P_n(x)$ 在$[-1,1]$上非负且$\int_{-1}^{1} P_n(x) \mathrm{d}x = 1$,则

$$P_n(1) \leqslant \begin{cases} k(k+1)/2, & 若\ n = 2k-1, \\ (k+1)^2/2, & 若\ n = 2k. \end{cases}$$

$P_n(-1)$ 有同样的估计. 这些上界不能再改进. 见[56]Vol. 2. P. 111.

(3)　设 $P_n(x)$ 在$[-1,1]$上非负,且

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1-x)^{\beta} P_n(x) \mathrm{d}x = 1, \quad \alpha, \beta > -1, \quad 则$$

$$P_n(1) \leqslant \begin{cases} 2^{-(\alpha+\beta+1)} \dfrac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(k)\Gamma(k+\beta+1)}, & n = 2k-1, \\ 2^{-(\alpha+\beta+1)} \dfrac{\Gamma(k+\alpha+2)\Gamma(k+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(k+1)\Gamma(k+\beta+1)}, & n = 2k. \end{cases}$$

交换 α, β 的位置,得到 $P_n(-1)$ 的上界. 这些上界都不能再改进. 见[56]Vol. 2. P. 111 - 112.

(4)　设 $\alpha, \beta > -1$,且$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} [P_n(x)]^2 \mathrm{d}x = 1$,则

$$[P_n(1)]^2 \leqslant \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+\alpha+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\beta+1)};$$

$$[P_n(-1)]^2 \leqslant \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\beta+2)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)}.$$

特别当 $\alpha = 1, \beta = 0$ 时,即$\int_{-1}^{1} (1-x) [P_n(x)]^2 \mathrm{d}x = 1$ 时,成立

$$P_n(1) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{n+2}{2}; \quad |P_n(-1)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \binom{n+2}{2}^{1/2}.$$

这些上界都是最好的. 见[56]Vol. 2. P. 110 - 111.

7.　设 m, M 分别是 n 次多项式 $P_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值和最大值. 记

$$a_n = \begin{cases} k(k+1), \text{若 } n = 2k-1, \\ (k+1)^2, \text{若 } n = 2k, \end{cases}$$ 则成立

$$m + (M-m)/a_n \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x \leqslant M - (M-m)/a_n.$$

这是积分第一中值定理关于 n 次多项式 $P_n(x)$ 的加强形式. 见[56]Vol. 2. P. 111.

提示: 不妨设 $m = 0$, 若 $a < \xi < b$, 则

$$P_n(\xi) \leqslant \frac{a_n}{\xi - a}\int_a^\xi P_n(x)\mathrm{d}x; P_n(\xi) \leqslant \frac{a_n}{b-\xi}\int_\xi^b P_n(x)\mathrm{d}x,$$

从而　$P_n(\xi) \leqslant \frac{a_n}{b-a}\int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x; M \leqslant \frac{a_n}{b-a}\int_a^b P_n(x)\mathrm{d}x.$

8.　设 $\alpha > -1, P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^n a_k x^k$ 为 n 次实系数多项式. 当 $x \geqslant 0$ 时 $P_n(x) \geqslant 0$, 且 $\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha P_n(x)\mathrm{d}x = 1$. 令 $k = [\frac{n}{2}]$, 则

$$P_n(0) \leqslant \frac{\Gamma(k+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(k+1)}.$$

这一上界不能再改进. 特别当 $\alpha = 0$ 时, $P_n(0) \leqslant k+1 = [\frac{n}{2}] + 1$; 而对于 $x \geqslant 0$, 有 $P_n(x) \leqslant ([\frac{n}{2}]+1)e^x$. 见[56]Vol. 2. P112.

9.　设 $\alpha > -1, P_n(x)$ 为 n 次实系数多项式, 若 $\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha [P_n(x)]^2\mathrm{d}x = 1$. 则

$$|P_n(0)|^2 \leqslant \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n+1)}.$$ 见[56]Vol2. P111.

10.　设 n 次多项式 $P_n(x)$ 满足条件:

$\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}[P_n(x)]^2\mathrm{d}x = 1$, 则 $P_n(0)^2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}$, 式中 $k = [\frac{n}{2}]$. 见[56]Vol. 2. P111.

11.　**马一斯不等式(马勒尔一斯普林茹克不等式)**: 1932 年马勒尔提出猜想: $\forall n, \forall \varepsilon > 0$, 至多存在有限多个 n 次整系数多项式 $P_n(x)$, 使得 $|P_n(x)| \leqslant [H(P_n)]^{-(n+\varepsilon)}$　$a.e.x$ 成立. $H(P_n)$ 的定义见 N. 4.

1965 年斯普林茹克证明了上述猜想. (见 Baker, A., Transcendental Number Theory, Cambridge Univ. Press, 1975)

12.　对于所有实数 x 和任意偶数 n, 有 $P_n(x) = x^n - nx + n - 1 \geqslant 0$. 仅当 $x = 1$ 时等号成立.

证　根据笛卡儿符号原则, 多项式 $P_n(x)$ 的正零点不能多于两个, 且不能有负零点. $P_n(x)$ 在 $x = 1$ 处有一个重零点, 而且它是惟一的实零点, 从而不等式得证.

注　这是一个基本不等式. 在许多情况下, 用于寻找其他不等式的出发点, 例如见

[4]§2.19 中的 Benson 方法.

13. [MCM]. 设 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ 为整系数多项式,于是

(1) 若 $W(P_n)$ 表示 $P_n(x)$ 中系数为奇数的个数,考虑多项式 $Q_k(x)=(1+x)^k$, $k=0,1,2,\cdots$,若 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 都是整数,且 $0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n$,则

$$W(Q_{i_1}+\cdots+Q_{i_n})\geqslant W(Q_{i_1});$$

(2) 若 r 为 $P_n^2(x)=m^2$ 的不同整数根的个数(m 为自然数),则 $r\leqslant n+2m$.

证明见[345]1984,11:34.

14. 设 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. 则 $\forall x\in R^1$. $P_n(x)\leqslant\frac{n}{4}$.

证 先证恒等式 $P_n(x)=nx(1-x)$,再从 $4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqslant 0$,得 $x(1-x)\leqslant 1/4$.

15. **Chebyshev 不等式:** 设 $0\leqslant x\leqslant 1,\delta>0$,令 $\Delta_n(x)=\{k:\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\delta\}$,则

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{x(1-x)}{n\delta^2}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}.$$

证 利用上一个不等式 N.14. 和 $k\in\Delta_n(x)$ 时 $(\frac{k-nx}{n\delta})^2\geqslant 1$,有

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k\in\Delta_n(x)}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n^2\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n\delta^2}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}.$$

16. **Lorentz 不等式:** 设 $a_k\geqslant 0,0\leqslant x\leqslant 1$,则 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k(1-x)^{n-k}$ 称为 Lorentz 多项式. 1963 年 Lorentz, G. G. 证明,对于任意自然数 r,存在与 r 有关的常数 C,使 $\|P_n^{(r)}\|\leqslant Cn^r\|P_n\|$,式中, $\|P_n\|=\max\{|P_n(x)|,0\leqslant x\leqslant 1\}$.

1972 年, Scheick, J. T. 对于 $r=1,2$,将这个不等式改进为:

$$\text{设 } t_n(x)=\begin{cases}1/2, & \text{若 } n=1,\\ x+\dfrac{1-2x}{n}, & \text{若 } n\geqslant 2.\end{cases}$$

则对于 $0\leqslant x\leqslant 1/2$,有

(1) $-2P_n(x)\leqslant P'_n(x)\leqslant e\cdot n\cdot P_n[t_n(x)]$.

(2) $|P''_n(x)|\leqslant 2en(n-1)P_n[t_n(x)]$.

1985 年周颂平又进一步推广为:

$$\|P_n^{(r)}\|_q=\begin{cases}c_rn^r\|P_n\|_q, 1\leqslant q\leqslant\infty,\\ c_rn^{rq}\|P_n\|_q, 0<q<1,\end{cases}$$

$$\text{式中 }\|P_n\|_q=\begin{cases}(\int_0^1|P_n(x)|^q\mathrm{d}x)^{1/q}, & 1\leqslant q<\infty,\\ \int_0^1|P_n(x)|^q\mathrm{d}x, & 0<q<1.\end{cases}$$

证明见[352]1985,12(2):157－160.

17. **Bernstein 第二不等式**:设 $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$ 为 n 次代数多项式,则

$$|P'_n(x)|\leqslant\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\|P_n\|_{C[-1,1]},(-1<x<1).$$

提示:令 $x=\cos\theta$,归结为 n 阶三角多项式:$P_n(\cos\theta)=T_n(\theta)$.见本章 §3.

推论 1 设 $a<x<b$,则

$$|P'_n(x)|\leqslant\frac{n}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}\|P_n\|_{C[a,b]}.$$

推论 2 设 $a<a_1<b_1<b$,则 $\forall x\in[a_1,b_1]$,有

$$|P'_n(x)|\leqslant Mn\|P_n\|_{C[a,b]}.\ |P_n^{(k)}(x)|\leqslant(Mkn)^k\|P_n\|_{C[a,b]}.$$

式中 $M=\max\left\{\frac{1}{a_1-a},\frac{1}{b-b_1}\right\}$.而 n^k 可换成 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Bernstein 第二不等式给出了用代数多项式的大小来估计它的导数的大小,在逼近论中是证明逆定理的基本工具.但对于区间端点,它便失去了意义,为了估计多项式导数在整个闭区间上的大小,有下述与之类似的 Markov 不等式.

1994 年,Borwein 等证明了实有理函数的 Bernstein 型不等式:设 $P(x)$ 的 (n,n) 型实有理函数,其极点为 $a_k\in R^1-[-1,1]$,则

$$|P'(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{a_k^2-1}}{|a_k-x|}\|P\|_C,x\in[-1,1].$$

见[317]1994,50(2):501－519.

18. **Markov 不等式(1889)**:设 $P_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上 n 次实系数代数多项式,则

(1) $$\|P'_n\|_c\leqslant\frac{2n^2}{b-a}\|P_n\|_c. \tag{1.2}$$

式中系数 $\frac{2n^2}{b-a}$ 是最佳的,由此推出 k 阶导数 $P_n^{(k)}(x)(k\leqslant n)$ 的不等式:

$$\|P_n^{(k)}\|_c\leqslant\frac{2^k}{(b-a)^k}n^2\cdots(n-k+1)^2\|P_n\|_c. \tag{1.3}$$

但当 $k\geqslant 2$ 时系数不是最佳的,它的最佳形式是

$$\|P_n^{(k)}\|_c\leqslant\frac{2^kn^2(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{(b-a)^k(2k-1)!!}\|P_n\|_c. \tag{1.4}$$

证明见[321]1916,77:213－258.

注 设 $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式.取 $[a,b]=[-1,1]$,则

$$T_n^{(k)}(1)=\frac{n^2(n^2-1)\cdots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!}.$$

于是(1.4)式可写成

$$\|T_n^{(k)}\|_{C[-1,1]}\leqslant T_n^{(k)}(1)\|P_n\|_{C[-1,1]}. \tag{1.5}$$

1982 年,Bojanov 证明上述不等式中 $C[-1,1]$ 范数可改为 $L^p[-1,1]$ 范数,$1\leqslant p<\infty$.见[327]1982,35:181－190.

设 n 阶多项式 $Q_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 内有 n 个不同的零点,令

$$D=\{-1\}\cup\{1\}\cup\{x_j:Q'_n(x_j)=0,1\leqslant j\leqslant n-1\}.$$

若 $P_n(x)$ 满足 $|P_n(x_j)|\leqslant|Q_n(x_j)|,x_j\in D$,则

$|P_n^{(k)}(x)|\leqslant\max\left\{|Q_n^{(k)}(x)|;\left|\left(\frac{x^2-1}{k}\right)Q_n^{(k+1)}(x)+xQ_n^{(k)}(x)\right|\right\},1\leqslant k\leqslant n,x\in[-1,1]$;

推论 设 $|P_n(\cos\frac{j\pi}{n})|\leqslant1,0\leqslant j\leqslant n$,则 $\|P_n^{(k)}\|_C\leqslant\|T_n^{(k)}\|_C$. 式中 $T_n(x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式. 见[332]1992,8(3):51－61.

若在 $T_{n-1}(x)$ 的零点 x 处,成立 $|P_n(\pm1)|\leqslant1$,且 $|P_n(x)|\leqslant\sqrt{1-x^2}$,则成立 **DS 型不等式(Dyffin-Schaeffer 型不等式)**:

$\|P_n^{(k)}\|_C\leqslant T_n^{(k)}(1)$,仅当 $P_n=\pm T_n$ 时等号成立. 见[327]1998,93(1):157－176.

(2) 取 $[a,b]=[-1,1]$,则

$$\|P'_n\|_{C[-1,1]}\leqslant n\min\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},n\right\}\|P_n\|_{C[-1,1]}.$$

特别地,若 $|x|\leqslant1$, $|P_n(x)|\leqslant1$,则 $|P'_n(x)|\leqslant n^2$.

例如,$P_2(x)=ax^2+bx+c$,若 $|x|<1$, $|P_2(x)|\leqslant1$,则

$$|P'_2(x)|=|2ax+b|\leqslant4.$$

此题曾两次作为数学竞赛试题.(见[66]P80－83)

(3) 1980 年 Podkorytov-Dynkin 证明:设 $x\geqslant1,1\leqslant p\leqslant\infty$,则

$$|P_n^{(k)}(x)|\leqslant c(p,k)n^k(x+\sqrt{x^2-1})^{n+\frac{2}{p}}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{x^2-1}\right)^{-k-\frac{2}{p}}\|P_n\|_p,$$

若 $1\leqslant p<\infty$,则与 p,k 有关的常数 $c(p,k)$ 有以下估计式:

$c(p,k)\leqslant M^{k+1}k!(p-1)^{1-\frac{1}{p}}$,其中 M 为绝对常数.

(4) $\|P'_n\|_{C[-1,1]}\leqslant n^2/2[\max P_n(x)-\min P_n(x)]$. $-1\leqslant x\leqslant1$,特别当 $P_n(x)>0$ 时,有

$$\|P'_n\|_{C[-1,1]}\leqslant n^2/2\|P_n\|_{C[-1,1]}.$$

(5)
$$\|P'_n\|_\infty\leqslant\frac{2(n+1)^2}{b-a}\|P_n\|_\infty;$$

$$\|P_n\|_q\leqslant\left[\frac{2(p+1)(n+1)^2}{b-a}\right]^r\|P_n\|_p,$$

式中 $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty,r=(1/p)-(1/q)$, $\|\cdot\|_p$ 在 $L^p[a,b]$ 上取. 见[55]P85.

(6) **广义 Markov 不等式**:设 f' 在 $[0,\infty)$ 上递增,则

$$\int_{-1}^1 f(|P'_n(x)|)\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^1 f[\|P_n\|_{C[-1,1]}|T'_n(x)|]\mathrm{d}x.$$

式中 $T_n(x)$ 为第一类 Chebyshev 多项式,见[339]1999,19(4):673－679.

19. 1937 年,Hille,Szegö 等将 Markov 不等式推广到 $L^p[-1,1]$ 空间. 证明

$$\|P'_n\|_p\leqslant c(n,p)n^2\|P_n\|_p. \tag{1.6}$$

式中 $c(n,p)=\begin{cases}2(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}, & p=1,\\ 2(p-1)^{\frac{1}{p}-1}(p+\dfrac{1}{n})[1+\dfrac{p}{np-p+1}]^{n-1+\frac{1}{p}}, & p>1;\end{cases}$

$$c(n,p)\leqslant 6\exp(1+\frac{1}{e}).(n>0,p\geqslant 1);\quad \lim_{p\to\infty}c(n,p)=2(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}<2e;$$

$$\lim_{n\to\infty}c(n,p)=\begin{cases}2e, & p=1,\\ 2ep(p-1)^{\frac{1}{p}-1}, & p>1.\end{cases}$$

特别当 $p=2$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}c(n,2)=1/\pi$.(Hille.1937)

$$c(n,2)=\frac{[n+(3/2)]^2}{n^2\pi\left[1-\dfrac{\pi^2-3}{12(n+\frac{3}{2})^2}+\dfrac{R}{(n+\frac{3}{2})^4}\right]}\quad(n\geqslant 5),$$

式中 $-6<R<13$.(Schmidt,1943)

$$c(n,2)\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})]^{1/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$c(n,2)$ 关于 n 递减，且当 $n>64$ 时，$1/\pi<c(n,2)<1/3$.

问题：当 $p\neq 2$ 时，$c(n,p)$ 是否也关于 n 递减？若它递减，则可推出

$\|P'_n\|_p\leqslant n^2(1+p)^{1/p}\|P_n\|_p$.

见[327]1990,62(2):197－205.

1990 年，Goetgheluck.P.将(1.6)式改进为：

$\|P'_n\|_1\leqslant(8/\pi)^{1/2}[n+(3/4)]^2\|P_n\|_1$；　$\|P'_n\|_p\leqslant cn^2\|P_n\|_p,(p>1)$.

式中 $c=\left[\dfrac{(2p+1)^{2+\frac{1}{p}}}{p(p+1)}\right]^{\frac{p-1}{p+1}}\left(2p\dfrac{p+1}{p-1}\right)^{1/p}\left(\dfrac{p-1}{2}\right)^{\frac{2}{p(p+1)}}\left[\left(1-\dfrac{3}{5n}\right)\left(1+\dfrac{1}{np}\right)\right]^{1-\frac{1}{p}}$.

当 $p\to\infty$ 时，$c\to 4(1-\dfrac{3}{5n})$.

Markov 不等式的另一推广是

$\|P'_n\|_p\leqslant\|T'_n\|_p\|P_n\|_\infty,1\leqslant P\leqslant\infty$，式中 T_n 是第一类 Chebyshev 多项式(见本章 §2).$C(n,p)=\|T'_n\|_p$ 是最佳常数.特别地，$C(n,1)=2n,C(n,\infty)=n^2$.

Ciesielski,Zbigniew 提出猜想：当 $p>2$ 时，

$$\|T'_n\|_p\leqslant n^{2/q}\sigma_{n,p}^{1/p}.\tag{1.7}$$

式中 $1<p<\infty,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,\sigma_{n,p}=2\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(2k-1)^{p-1}}$，而当 $1<p<2$ 时，(1.7)式右边还要乘上因子 1.033…….见 Approx.Theory (Memphis,TN,1991),P257－262.另见[327]1999,101(1)148－155.

Dzjadyk 不等式：设 $\omega(t)$ 为连续模(见第 12 章)，$\Delta_n(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\dfrac{1}{n^2}$，$r$ 为整数，若 $|P_n(x)|\leqslant\Delta_n^r(x)\omega(\Delta_n(x)),\forall x\in[-1,1]$，则

$$|P'_n(x)|\leqslant C_r\Delta_n^{r-1}(x)\omega(\Delta_n(x)),x\in[-1,1].$$

证明见[71]P163 - 173.

20. 1989年周颂平证明:设 $P_n(x)$ 是具有正系数的 n 阶代数多项式,则

$$\| P_n^{(k)}(x)(\sqrt{1-x^2})^k \|_p \leqslant c_k n^\alpha \| P_n \|_q,$$

式中 $1 \leqslant p,q \leqslant \infty, \alpha = \frac{k}{2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

1980年,Taberski 证明:当 $0 < p < 1$ 时, $\| P'_n \|_p \leqslant c_p n^2 \| P_n \|_p$;

若 $-1 < \alpha < \beta < 1$,则 $\| P'_n \|_{L^p[\alpha,\beta]} \leqslant c(\alpha,\beta,p) n \| P_n \|_p$.

1987年,周颂平将上述结果推广为:

$$\int_{-1}^1 | P_n^{(k)}(x) \Delta_n^k(x) |^p \mathrm{d}x \leqslant c_{r,p} \int_{-1}^1 | f(x) |^p \mathrm{d}x,$$

式中,$\Delta_n(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}$.而 Timan 则证明

$$| P_n^{(k)}(x) | \leqslant c_k [\Delta_n(x)]^{-k} \| f \|_c . x \in (-1,1).$$

见[352]1987,14(1):25 - 28,1989,16(3):245 - 247.上述范数除指明以外,均在[-1,1]上取.

21. 设 $u_m(x)$ 是 m 阶第二类 Chebyshev 多项式:

$u_m(x) = \sin(m\arccos x), Q_n(x) = (x^2-1)u_{n-2}(x)$,

$P_n(x)$ 是[-1,1]上 n 次代数多项式,若 $\| P_n \|_c \leqslant \sqrt{1-x^2}$,则

(1) $\| P_n^{(k)} \|_c \leqslant Q_n^{(k)}(1)$.见[309]1988,310(2):693 - 702.

(2) 令 $\omega(x) = (1-x^2)^t$,式中 $t = k - (5/2), k \geqslant 2$,则

$\| P_n^{(k)} \|_{2,\omega} \leqslant \| Q_n^{(k)} \|_{2,\omega}$.(Guessab,A 等[327]1997,90(2):255 - 282).

22. Markov 不等式可推广到多元多项式:在 R^n 中,设 $P_m(x) = \sum_{|\beta| \leqslant m} \alpha_\beta (x-x_0)^\beta$ 是次数不超过 m 的多项式,$B = B(x_0, r)$ 是以 x_0 为中心,r 为半径的闭球,$0 < r \leqslant 1$,则

$$\max_B | \mathrm{grad} P_m | \leqslant c r^{-1} \max_B | P_m |. \quad (\text{见}[329]1984,80:141-166)$$

1989年 Nadzhmiddinov,D.等证明了三角形中多项式的 Markov 不等式:

$$\frac{2n^2}{h} \leqslant \sup_\zeta \sup_{P_n \neq 0} \| D_\zeta P_n \| \cdot \| P_n \|^{-1} \leqslant \frac{4n^2}{h}.$$

式中 Δ 为 R^2 中三角形,$\| \cdot \|$ 为 $C(\Delta)$ 上的范数,D_ζ 表示 ζ 沿的方向导数,h 是三角形的最小高.见[405],1989,46(2):76 - 82,159.

1992年,Ditzian,Z.证明设 D 为 R^n 中有界凸集,则

$$\| \frac{\partial}{\partial \zeta} P_n \|_p \leqslant C n^2 \| P_n \|_p; \tag{1.8}$$

$$\| \sqrt{1-x^2} P'_n(x) \|_p \leqslant C n \| P_n \|_p; \tag{1.9}$$

$$\| P'_n \|_p \leqslant C n^2 \| P_n \|_p, \tag{1.10}$$

(1.8)式中的 p 范数在 D 上取,而(1.9)~(1.10)式中 p 范数在[-1,1]上取,$1 < p \leqslant \infty$.

见[327]1992,70(3):273 - 283.

1996 年,Skalyga,V.I. 考虑了 R^n 中的方体

$Q = \{x = (x_1,\cdots,x_n) \in R^n: -1 \leqslant x_k \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 上的多项式

$P_m(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha x^\alpha$,式中 $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为 n 重指标,若 $|P_m(x)| \leqslant 1, x \in Q$,则

$$\max_{x \in Q}\Big(\sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha P_m(x)|^2\Big)^{1/2} \leqslant m;$$

$$\max_{x \in Q}\max_{|\alpha|=2} |D^\alpha P_m(x)| \leqslant m^2(m^2-1)/3.$$

见[405],1996,60(5):783 - 787.

23.　设 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ 中所有系数 a_k 都是非负的,则当 $x \geqslant 0$ 时,成立

$$x[P'_n(x)^2 - P_n(x)P''_n(x)] \leqslant P'_n(x)P_n(x).$$

由此推出,设 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k(1-x)^k(1+x)^{n-k}$ 中所有 $a_k \geqslant 0$,则

$$(1-x^2)[P'_n(x)^2 - P''_n(x)P_n(x)] \leqslant nP_n(x)^2 - 2xP_n(x)P'_n(x).$$

见[308]1988,102(2):284.

24.　**Schur 不等式**:

(1)　设 $P_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 次代数多项式,若 $-1 < x < 1$ 时,有

$$|P_{n-1}(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{1-x^2}},$$

则在[-1,1]上,有 $|P'_{n-1}(x)| \leqslant Mn$.证明见[60]第一册 P.214 - 216.

注　从 Schur 不等式可直接证明前面的 Bernstein 不等式和 Markov 不等式.

(2)　若 $P_n(a) = P_n(b) = 0, n \geqslant 2$,则

$$\|P'_n\|_{C[a,b]} \leqslant \frac{2n}{b-a}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}\|P_n\|_{C[a,b]}.$$

25.　**Love 不等式**:若 n 次代数多项式 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ 的所有零点都是实的,则

$$(n-1)[P'_n(x)]^2 - nP_n(x)P''_n(x) \geqslant 0.$$

见[305]1962,69:668.

26.　**Erdös 不等式**:若 n 次代数多项式 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ 的所有零点都是实的,但不在[-1,1]内,则

$$\|P'_n\|_{C[-1,1]} < \frac{1}{2}en\|P_n\|_{C[-1,1]}.$$

注　若区间[-1,1]改为[a,b],则不等式右端分母 2 应改为 $b-a$.

27.　**Turán 不等式**:若 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ 的所有零点都是实的,但都在[-1,1]内,C 范数与 L^P 范数都在[-1,1]上取,则

(1)　$\|P'_n\|_C \geqslant \frac{\sqrt{n}}{6}\|P_n\|_C$.

(2) 1976 年 Varma, A. K. 证明了下述最好的结果:

$$\frac{\|P'_n\|_C}{\|P_n\|_C} \geqslant \begin{cases} n/2, & \text{若 } n = 2,3, \\ \dfrac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\dfrac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}}, & \text{若 } n \geqslant 4 \text{ 且为偶数}, \\ \dfrac{n^2}{(n-1)\sqrt{n+1}}\left(1-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n-1}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{若 } n \geqslant 5 \text{ 且为奇数}. \end{cases}$$

(3) 在 L^p 空间中, Turan 不等式也有相应的结果:

$$\|P'_n\|_p \geqslant c\sqrt{n}\,\|P_n\|_p, (1 \leqslant p < \infty).$$

若 $P_n(x)$ 至多有 k 个零点位于 $[-1,1]$ 之外, 则当 $n > k$ 时, 有

$$\|P'_n\|_p \geqslant c_k\sqrt{n}\,\|P_n\|_p, (1 \leqslant p \leqslant \infty).$$

其中 c_k 是只与 k 有关的正常数.

证明见[110]P.877 - 878, [352]1984, 11(1):28 - 33.

(4) 1992 年周颂平证明: 存在正常数 C, 使得

$$\|P'_n\|_p \leqslant Cn^r \|P_n\|_p, \tag{1.11}$$

式中 $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$, $r = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \geqslant 0$.

作者还证明了两个类似的不等式, 见[327]1992, 68(1):45 - 48, 作者提出, 若取消 $P_n(x)$ 的零点都在 $[-1,1]$ 内的限制, (1.11) 式是否仍成立? 又在什么条件下, 成立相应的加权不等式 $\|P'_n\|_{p,w} \leqslant Cn^r \|P_n\|_{p,\omega}$. 见[71]P198. 另见[158]P.473 - 481.

(5) 设 $P_n(x)$ 在 $|x| < 1$ 内至多有 k 个零点, 则存在绝对常数 $C > 0$, 使得 $\forall x \in [-1,1]$, 成立

$$|P'_n(x)| \leqslant C\min\left\{(k+1)n, \left(\frac{(k+1)n}{1-x^2}\right)^{1/2}\right\}\|P_n\|_C.$$

见[71]P174.

28. 设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 是圆 $|z| \leqslant 1$ 上的复系数多项式, 记 $\|P_n\| = \max\{|P_n(z)|: |z| = 1\}$, $\|P_n\|_i = \min\{|P_n(z)|: |z| = 1\}$, 则

(1) $\|P'_n\| \leqslant n\|P_n\|$,

仅当 $P_n(z) = mz^n\exp(i\alpha)$ $(m > 0)$ 时等号成立.

(2) **Erdös-Lax 不等式**: 若 $P_n(z)$ 在 $|z| = 1$ 内部没有零点, 则

$$\|P'_n\| \leqslant (n/2)\|P_n\|.$$

仅当 $P_n(z)$ 的所有零点都位于 $|z| = 1$ 上时等号成立. 1969 年 Govil, N. K. 将上式推广为: 若 $P_n(z)$ 在 $|z| \leqslant R$ 内无零点, $R \geqslant 1$, 则对于 $|z| \leqslant 1$, 有

$$\|P'_n\| \leqslant \frac{n}{1+R}\|P_n\|.$$

(3) 1939 年 Turan 证明: 若 $P_n(z)$ 的所有零点都在 $|z| \leqslant 1$ 内, 则

$$\|P'_n\| \geqslant (n/2)\|P_n\|.$$

1969 年 Malik 证明:若 $P_n(z)$ 的所有零点都在 $|z|\leqslant R\leqslant 1$ 内,则上式可换成

$$\|P'_n\|\geqslant\frac{n}{1+R}\|P_n\|,$$

仅当 $P_n(z)=(z+R)^n$ 时等号成立.

见[327]1990,63(1):65 - 71,推广见[301]1992,166:319 - 324.

(4)　1988 年,Aziz,A. Dawood,Q. M. 将上述结果推广为:若 $P_n(z)$ 的所有零点都在 $|z|\leqslant 1$ 内,则

$$\|P'_n\|_i\geqslant n\|P\|_i;$$

$$\min_{|z|=R>1}|P_n(z)|\geqslant R^n\|P_n\|_i;$$

$$\max_{|z|=R>1}|P_n(z)|\leqslant R^n\|P_n\|_i,\tag{1.12}$$

仅当 $P_n(z)=mz^n\exp(ia)$　$(m>0)$ 时等号成立.(从极大模原理可直接证明(1.12)式).

$$\|P'_n\|\geqslant(n/2)(\|P_n\|+\|P_n\|_i),$$

仅当 $P_n(z)=\alpha z^n+\beta(|\beta|\leqslant|\alpha|)$ 时等号成立.

若 $P_n(z)$ 在 $|z|<1$ 内没有零点,则

$$\|P'_n\|\leqslant(n/2)(\|P_n\|-\|P_n\|_i);$$

$$\max_{|z|=R>1}|P_n(z)|\leqslant\left(\frac{R^n+1}{2}\right)\|P_n\|-\left(\frac{R^n-1}{2}\right)\|P_n\|_i.$$

仅当 $P_n(z)=\alpha z^n+\beta$　$(|\beta|\geqslant|\alpha|)$ 时等号成立,见[327]1988,54(3):306 - 313.

1991 年 Govil,N. N. 又进一步推广为:设

$\|P_n\|=\max\{|P_n(z)|:|z|=R\}$, $\|P_n\|_i=\min\{|P_n(z)|:|z|=R\}$,

若 $P_n(z)$ 在 $|z|<R(R\geqslant 1)$ 内无零点,则

$$\|P_n^{(m)}\|\leqslant n(n-1)\cdots(n-m+1)(1+R^m)^{-1}(\|P_n\|-\|P_n\|_i);$$

若 $P_n(z)$ 的零点都在 $|z|\leqslant R$ 内,则当 $R\leqslant 1$ 时,有

$$\|P'_n\|\geqslant\left(\frac{n}{1+R}\right)\|P_n\|+\frac{n}{(1+R)R^{n-1}}\|P_n\|_i,$$

仅当 $P_n(z)=(z+R)^n$ 时等号成立;而当 $R\geqslant 1$ 时,

$$\|P'_n\|\geqslant\left(\frac{n}{1+R^n}\right)(\|P_n\|+\|P_n\|_i),$$

仅当 $P_n(z)=z^n+R^n$ 时等号成立. 见[327]1991:66:39 - 35. 另见[301]2002,269(2):489 - 499.

(5)　若 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k=a_n\prod_{k=1}^{n}(z-z_k),a_n\neq 0,n\geqslant 2,|z_k|\leqslant R_k,1\leqslant k\leqslant n$,

令 $R=\max\{R_1,\cdots,R_n\},S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{R}{R+R_k}$,若 $R\geqslant 1$,则当 $n>2$ 时,成立

$$\|P'_n\|\geqslant\frac{2S_n}{1+R^n}\|P_n\|+|a_1|\left(1-\frac{1}{R^2}\right)+\frac{2|a_{n-1}|S_n}{R(1+R^n)}\left(\frac{R^n-1}{n}-\frac{R^{n-2}-1}{n-2}\right);$$

$$\|P'_n\|\geqslant\frac{2S_n}{1+R^n}\|P_n\|+|a_1|\left(1-\frac{1}{R}\right)+\frac{|a_1|(R-1)^nS_n}{R(1+R^n)},(n=2).$$

以上二式均仅当 $P_n(z)=z^n+R^n$ 时等号成立，见[327]1990,63:65－71.

(6)　设 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^{n-k}=\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$，式中 $a_0=1,a_1=0,n\geqslant 2$. $P_n(z)$ 的零点 z_k 满足 $\sum_{k=1}^{n}z_k=0$. 它的导数 $P'_n(z)=n\prod_{k=1}^{n-1}(z-\omega_k)$ 的零点 ω_k 满足 $\sum_{k=1}^{n-1}\omega_k=0$. 于是复平面 C 的原点 O 是集 $\{z_k;\omega_k\}$ 的形心. $R=\{z_k;\omega_k\}$ 称为 $P_n(z)$ 的复 Rolle 集. Schoenberg, I. J. 猜想. $\sum_{k=1}^{n-1}|\omega_k|^2\leqslant[1-(2/n)]\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2$，仅当复 Rolle 集 R 为直线时等号成立. 已证以下三种特殊情况时成立：(1) $n=3$；(2) $P_n(z)=z^n+a_kz^{n-k}$ 为二项式；(3) 所有 ω_k 为实数. 见[305],1986,93:8－13.

(7)　设 $P_n(z)$ 满足 $P_n(z)=z^nP_n(1/z)$. Rahman 于 1983 年提出，是否成立

$$\|P'_n\|\leqslant\frac{n}{\sqrt{2}}\|P_n\|$$

已知 $n=1,2$ 时成立，相关不等式见[308]1983,89(2):259－266.

29.　设 $P_n(z)=a_n\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$ $(a_n\neq 0)$ 为 n 次多项式，令

$\|P_n\|=\max\{|P_n(z)|:|z|=1\}$.

(1)　若 $|z_k|\geqslant M_k\geqslant 1$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，则

$$\|P'_n\|\leqslant c\cdot n\cdot\|P_n\|.$$

式中 $c=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{M_k-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k+1}{M_k-1}\right)^{-1}$，仅当 $P_n(z)=(z+M_k)^n$　$(M_k\geqslant 1)$ 时等号成立.

(2)　若 $a_n=1$, $|z_k|\leqslant M_k\leqslant 1, 1\leqslant k\leqslant n$，则

$$\|P'_n\|\geqslant\frac{n}{2}\left\{1+\frac{1}{1+(2/n)}\sum_{k=1}^{n}\frac{M_k}{1-M_k}\right\}\|P_n\|.$$

更多结果见[400]1997,107(2):189－196. 和[301]2002,269(2):489－499.

30.　设 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ 为 n 次复多项式.

令 $M_p(R)=\max\{|P_n(z)|:|z|=R\}$, $\|P_n\|=M_p(1)$，则

(1)　$\|P'_n\|+\varepsilon_n|P_n(0)|\leqslant n\|P_n\|$,

式中 $\varepsilon_1=1$, $n\geqslant 2$ 时, $\varepsilon_n=\frac{2n}{2n+2}$，对于每个 n, $|P_n(0)|$ 的系数是最佳系数.

(2)　对于所有 $R>1$，有

$$M_p(R)+(R^n-R^{n-2})|P_n(0)|\leqslant R^n\|P_n\|,$$

其中 $|P_n(0)|$ 的系数是最佳系数.

(3)　**Frappier 不等式**：$\|P'_n\|+c_n|P'_n(0)|\leqslant n\|P_n\|$.

式中 $c_1=0, c_2=\sqrt{2}-1, c_3=1/\sqrt{2}$，而 $n\geqslant 4$, c_n 是方程

$$(n+4)x^4-16x^3-8(3n+2)x^2+16n=0$$

在(0,1)内的惟一根,对于每个 n, $|P'_n(0)|$ 的系数是最佳系数.

1989 年,Abdul,A.将上述结果推广为:

$$\|P'_n\| \leqslant (n/2)(M_\alpha + M_{\alpha+\pi}).$$

式中 $M_\alpha = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |P_n \cdot \exp[i(\alpha + 2k\pi)/n]|$, $\alpha \in R^1$,当 $P_n(z) = z^n + re^{i\alpha}(|r|\leqslant 1)$ 时等号成立.见[301]1989,144(1):226 - 235.

31. **Colucci 不等式**:若复系数多项式 $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$ 的每一个根的模不超过正数 M,则

$$|P_n^{(k)}(z)| \leqslant k!\binom{n}{k}|a_0|(|z| + M)^{n-k},$$

其中 $P_n^{(0)}(z) = P_n(z)$, $k = 0,1,2,\cdots,n$.

32. 设 $P_n(x)$ 为实系数多项式,并且对于所有实数 x, $P_n(x) \geqslant 0$,则

$$\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(x) \geqslant 0, \text{式中 } P_n^{(0)}(x) = P_n(x).$$

33. **Newman 不等式**:

(1) 设 $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, $Q_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^{m-k}$, $R_n(x) = P_k(x)/Q_j(x)$, $0 \leqslant k, j \leqslant n$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$,则当 $n \geqslant 5$ 时,有

$$\inf_{R_n} \max_x ||x| - R_n(x)| \leqslant 3\exp(-\sqrt{n}), \inf_{P_n} |\max_x |x| - P_n(x)| \geqslant \frac{c}{n}, (c > 0).$$

见[82]P.149.

(2) $Q_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1}[x + \exp(-\frac{k}{\sqrt{n}})]$ 称为 n 次 Newman 多项式,

则 $\forall x \in [\exp(-\sqrt{n}), 1)]$, $n \geqslant 5$,有

$$\left|\frac{Q_n(-x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \exp(-\sqrt{n}).$$

(3) 令 $R_n(x) = x\dfrac{Q_n(x) - Q_n(-x)}{Q_n(x) + Q_n(-x)}$,式中 $Q_n(x)$ 是 n 次 Newman 多项式,则当 $n \geqslant 5$ 时,有

$$||x| - R_n(x)| \leqslant 3\exp(-\sqrt{5}).$$

(4) 设 $Q_n(x)$ 为 n 次 Newman 多项式,令

$$K_n(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{Q_n(x) - Q_n(-x)}{Q_n(x) + Q_{n-1}(-x)}\right] = \frac{Q_n(x)Q'_n(-x) + Q_n(-x)Q'_n(x)}{[Q_n(x) + Q_n(-x)]^2},$$

则

$$K_n(0) \sim \frac{\sqrt{n}}{2}e^{\sqrt{n}};$$

$$\int_{\exp(-\sqrt{n})}^{1} |K_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 3\exp(-\sqrt{n}); \quad \int_{-\exp(-\sqrt{n})}^{\exp(-\sqrt{n})} |K_n(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + 6e^{-\sqrt{n}};$$

见[83]P.149 - 154.

34. **Totik 不等式**:设 $P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k)$ 为 n 次多项式. $\omega(x)=(\frac{1}{\pi})\sqrt{1-x^2}$,则

$$\prod_{|\alpha_k|\geqslant 1}(|\alpha_k|+\sqrt{|\alpha_k|^2-1})\leqslant 2^n\|P_n\|_{p,\omega}.$$

见[327]1990,63:121 - 122.

35. 设 $P_n(x)$ 是 n 次实系数多项式,记 $\|P_n\|=\int_0^{\infty}P_n(x)e^{-x}\mathrm{d}x$,若 $\forall x\geqslant 0$, $P_n(x)\geqslant 0$,则

$$-\left[\frac{n}{2}\right]\|P_n\|\leqslant\|P'_n\|\leqslant\|P_n\|.$$

见[305]1968,75:511 - 512.

36. 设 n 次代数多项式 $P_n(x)$ 的所有零点均为实的且都位于区间 $[-1,1]$ 之外,记 $\|P_n\|_2=\left(\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$,则

(1) $\int_{-1}^{1}(1-x)^2[P'_n(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{n}{2}\|P_n\|_2^2$,

仅当 $P_n(x)=c(1+x)^p(1-x)^q,(p+q\neq n)$ 时等号成立;

(2) 若 $P_n(x)$ 还满足 $P_n(-1)=P_n(1)=0$,则

$$\|P'_n\|_2^2\leqslant\frac{n}{4}\frac{(2n+1)(n-1)}{(2n-3)}\|P_n\|_2^2,$$

仅当 $P_n(x)=c(1+x)(1-x)^{n-1}$ 或 $P_n(x)=c(1+x)^{n-1}(1-x)(c\neq 0)$ 时,等号成立;特别地,若 $P_n(x)$ 的所有零点都位于 $(-\infty,-1)$ 或 $(1,\infty)$ 内,则

$$\|P'_n\|_2\leqslant\frac{n}{2}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{1/2}\|P_n\|_2,$$

仅当 $P_n(x)=c(1+x)^n$ 或 $P_n(x)=c(1-x)^n$ 时等号成立. 见[110]P.879 - 890.

37. 设 $P_n(x)$ 的所有零点都是实的且都位于 $[-1,1]$ 之内,记 $\omega_1(x)=1-x^2$, $\omega_2(x)=(1-x_2)^{-1/2}$, $\|P_n\|_2=\left(\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$, $\|P_n\|_{2,\omega}=\left(\int_{-1}^{1}|P_n(x)|^2\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}$,则

(1) $\|P'_n\|_{2,\omega_1}\geqslant(n/2)^{1/2}\|P_n\|_2$,

仅当 $P_n(x)=C(1+x)^p(1-x)^q(p+q=n)$ 时等号成立;

(2) $\|P'_n\|_2>\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2}\|P_n\|_2$;

(3) 若 $|x_k|\leqslant 1/3$,令 $P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)$,则

$$\|P'_n\|_2\geqslant\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2n}\right)^{1/2}\|P_n\|_2;$$

(4) 若 $|T_n(x)|\leqslant 1, x\in[-1,1]$, $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$,则

$$\|P'_n\|_{2,\omega_1}\leqslant n\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)^{1/2}\|T'_n\|_{2,\omega_1};\quad \|P''_n\|_{2,\omega_2}\leqslant\|T''_n\|_{2,\omega_2}.$$

Varma, A. K. [327] 1992, 69(1): 48 - 54.

38. 设 P_n, Q_n 均为 $[-1,1]$ 上 n 次代数多项式. $x \in (-1,1)$ 时, $P_n(x) > 0$, L^p, C 范数均在 $[-1,1]$ 上取,

(1) 若 P_n 的所有零点都是实的, 则

$$\| P_n \|_1 > \frac{2}{n+1} \| P_n \|_c .$$

若 P_n 还满足 $P_n(-1) = P_n(1) = 0$, 则

$$\| P_n \|_1 \geqslant \frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \| P_n \|_c .$$

注 若将只有实零点的条件换成在开圆 $|z| < 1$ 内没有零点的条件, 上述结论仍成立.

(2) 令 $C(n,p) = \sup\left\{\int_{-1}^{1}(P_nQ_n): \| P_n \|_p \leqslant 1, \| Q_n \|_q \leqslant 1\right\}$. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则存在正数 M 和 $0 < \alpha < 1$, 使得 $1 - \frac{M\alpha^n}{n!} \leqslant C(n,p) \leqslant 1$, 特别地, 当 p 为自然数 m 时, $C(n,m) = 1$, 见[352]1988, 15: 267 - 269.

(3) 若实多项式 $P_n(x)$ 的导数 $P'_n(x)$ 只有实零点, 且 $P'_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内只有一个零点, 设 $-1, 1$ 是 $P_n(x)$ 的两个单零点, 则

$$\| P_n \|_1 \geqslant \frac{4}{3} \frac{P'_n(-1) \cdot P'_n(1)}{P'_n(1) - P'_n(-1)};$$

若 $-1, 1$ 是 $P_n(x)$ 的两个零点, 则 $\| P_n \|_1 \leqslant (4/3)P_n(x_0)$, 式中 x_0 是 $P'_n(x)$ 在 $(-1, 1)$ 中的零点. 均仅当 $P_n(x) = c(1 - x^2)$ 时等号成立. 1966 年, Kuhn, H. 将上述结果作了推广, 见[4]P312 - 313.

39. 设 $P_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上 n 次代数多项式, L^p 与 C 范数在 $[a,b]$ 上取, 则

(1) $\| P'_n \|_1 \leqslant 2n \| P_n \|_c$; (1.13)

(2) **Schmidt 不等式**: $\| P'_n \|_2 \leqslant \frac{2c_n^{1/2}}{b-a} \| P_n \|_2$. (1.14)

式中 $c_1 = 3, c_2 = 15, c_3 = (45 + \sqrt{1605})/2 \approx 42.6$.

我们问: $n > 3$ 时 (1.14) 式是否仍成立? c_n 的估计式是多少? 见 Schultz, M. H., Spline analysis(中译本) 上海科技出版社, 1979, P.8 - 9.

40. **Zygmund 不等式**: 设 $P_n(z)$ 为 n 次复代数多项式, 且 $q \geqslant 1$, 则

$$\int_0^{2\pi} | p'_n(e^{i\theta}) |^q d\theta \leqslant \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma((q/2)+1)}{\Gamma((q+1)/2)} n^q \int_0^{2\pi} | \mathrm{Re}P_n(e^{i\theta}) |^q d\theta,$$

仅当 $P_n(z) = cz^n$ 时等号成立, 见 J. Math. and Phys. 1942, 21: 117 - 123.

41. 设实多项式 $P_n(x)$ 由下述递归关系定义:

$P_0(x) = 1, P_n(x) = 1 + \int_0^x P_{n-1}(t - t^2)dt$, 则

$0 \leqslant P_n(x) - P_{n-1}(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}$, $x \in [0,1]$. ([4]P398 - 399)

42　(1) $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x > \left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{1/2} > \frac{1}{\sqrt{n}}$; (2) $\int_{-1}^{1}\left|\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k(k+1)x^k}{2^k}\right|\mathrm{d}x < 2$.

43.　若 $a<0<b$,则

$$\int_a^b \left|\sum_{k=1}^{2n}a_kx^k\right|\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{2n}|a_k|\left(\frac{b^{k+1}+|a|^{k+1}}{k+1}\right).$$

证明见[345]1987,1:37.

44.　**Swamy 不等式**:Fibonacci 多项式序列 $\{F_n(x)\}$ 定义为:$F_1(x)=1,F_2(x)=x,F_n(x)=xF_{n-1}(x)+F_{n-2}(x),n\geqslant 3$,则当 $n\geqslant 3$ 时,成立

$$\{F_n(x)\}^2 \leqslant (x^2+1)^2(x^2+2)^{n-3}.$$

证明见[305]1966,73:81.

45.　**Bruijn 不等式**:$P_n(z)$ 在 $|z|\leqslant R$ $(R\geqslant 1)$ 内无零点,$p>0$, 记 $\|P_n\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(e^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}$,则

$$\|P_n^{(k)}\|_p \leqslant n(n-1)\cdots(n-k+1)B_p\|P_n\|_p.$$

式中 $B_p=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|R^k+e^{i\alpha}|^p\mathrm{d}\alpha\right\}^{-1/p}$.推广见[400]1998,108(1):63－68.

46.　设 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ 为 n 阶复多项式,

$$\|P_n\|_q=\left\{\int_0^{2\pi}|P_n(e^{it})|^q\mathrm{d}t\right\}^{1/q},q>0,$$

(1)　$\|P'_n\|_q \leqslant n\|P_n\|_q$;

若 $|\alpha|\leqslant 1$,(α 为实数或复数),$r\geqslant 1$,则

$$\left(\int_0^{2\pi}|P_n(re^{it})-\alpha P_n(e^{it})|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q} \leqslant |r^n-\alpha|\ \|P_n\|_q,$$

仅当 $P_n(z)=\beta z^n$.($\beta\in C^1-\{0\}$)时等号成立.

(Aziz,A.等,Nonlinear Stud.1999,6(2):241－255)

(2)　若 $P_n(z)$ 在 $D=\{z:|z|<1\}$ 内无根,则

$$\|P'_n\|_p \leqslant c_pn\|P_n\|_p,,0<p<1,$$

式中 $c_p=\dfrac{(2\pi)^{1/p}}{\left(\int_0^{2\pi}|1+e^{it}|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}}=(\frac{1}{2})\left\{\dfrac{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)}\right\}^{1/p}$.

(Rubinstein,[305]1992,99(8):Pro.10255)

(3)　设 $0<p<q$, $r=1/p-1/q$, 则

$$\|P_n\|_q \leqslant C(p,q)n^r\|P_n\|_p.$$

47.　设 $P_n(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ 为 n 次复多项式:

(1)　若 $a_0=0,a_1\neq 0$,则存在一个临界点 $\theta\in C$,(即 $P'_n(\theta)=0$),使得

$$\left|\frac{a_k}{a_1}\right|^{\frac{1}{k-1}} | P_n(\theta) | \leqslant \beta_k | a_1 |. \quad \forall k \in N$$

式中常数 β_k 满足 $1 \leqslant \beta_k \leqslant 4$,已知 $\beta_2 = 2, \beta_3 = \sqrt{5}, \beta_4 = 14^{1/3}$,1981 年 Smale,S. 猜测 β_k 可取到 1.

(2) 若 $P_n(t)$ 在单位圆内无临界值 $P_n(\theta)$,(即若 $P'_n(\theta) = 0$,则 $| P_n(\theta) | \geqslant 1$),则 $| a_2 | \leqslant 2$,猜测 $| a_2 | < 1/2$. 见[376]1981,4(1):1 - 36.

(3) 设 Γ_n 是 $P_n(z)$ 的最大零点的模,Kakeya 证明:$\liminf\limits_{n\to\infty} \Gamma_n \leqslant c, c = 2$,而 Clunie 和 Erdös 证明:$\sqrt{2} < c < 2$,问 c 的最佳值是多少?见[106]P49.

(4) 若 $a_0 = 1, a_k = \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$, $| z | \leqslant 1, z \neq 1$,则

$$| P_n(z) | \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{| 1 - z |}}.$$

48. 设 $P(x,y)$ 是二元复系数多项式,并且 x 的最高次数为 m,y 的最高次数为 n,若 $\forall x,y$: $| x | \leqslant 1$, $| y | \leqslant 1$,有 $| P(x,y) | \leqslant M$,则 $\forall x,y$: $| x | \geqslant 1$, $| y | \geqslant 1$,有

$$| P(x,y) | \leqslant M(| x | + \sqrt{x^2 - 1})^m (| y | + \sqrt{y^2 - 1})^n.$$

见[74]P237.

49. **带 ± 1 系数的多项式不等式**:设 $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k, a_k = \pm 1$,令

$$\| P_n \|_q = \begin{cases} \left\{\int_0^1 | P_n[\exp(2\pi it)] |^q \mathrm{d}t\right\}^{1/q}, 1 \leqslant q < \infty, \\ \max | P_n[\exp(2\pi it)] |, \quad q = \infty. \end{cases}$$

$$N_q(P_n, m) = \left\{\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} | P_n[\exp(\frac{2\pi ki}{m})] |^q\right\}^{1/q}.$$

(1) **S-B 猜想**:若 $m \geqslant (1+\lambda)n, \lambda > 0$,则存在与 m 有关的常数 $c(m)$,使得

$$N_q(P_n, m) \geqslant [1 + c(m)]\sqrt{n+1}.$$

若 P_n 是自反多项式,即其系数 a_k 满足 $| a_k | = 1, a_{n-k} = \overline{a_k}$,则 Erdös 猜想以更强的形式成立:

$$\| P_n \|_4 \geqslant (1 + c)\sqrt{n+1}, c > 0.$$

特别地,若 $a_k = \pm 1$,则可取 $c = (3/2)^{1/4} - 1$. 见[406]1990,310(7):541 - 544.

(2) $\| P_n \|_1 < \sqrt{n + 0.97}$.

Newman 猜想: $\| P_n \|_1 \leqslant c\sqrt{n+1}$. $0 < c < 1$. 见[305]1960,671:778 - 779.

Laurent,H. 则证明:

$\| P_n \|_1 \leqslant n + 2(\sqrt{2} - 1) + \dfrac{0.18}{n+1}$,

$\| P_n \|_1 \leqslant n + 0.8250041$(当 n 充分大时).

见[406]1997.324(7):765 - 769.

50. **Nikolskii 型不等式**:令 $Q_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k e^{\lambda_k x}, a_k, \lambda_k \in R^1, 0 < p \leqslant \frac{1}{2}, A = \{x \in [-1,1]: |Q_n(x)| \leqslant 1\}$.若存在两个正数 c_1, c_2,使得 $\mu(A) \geqslant 2 - p$,且

$\exp(c_1 np) \leqslant \sup_{Q_n} |Q_n(0)| \leqslant \exp(c_2 np)$,则

$$\left(\frac{c_1(1+qn)}{r}\right)^{1/q} \leqslant \sup_{Q_n} \frac{|Q_n(y)|}{\|Q_n\|_q} \leqslant \left(\frac{c_2(1+qn)}{r}\right)^{1/q},$$

式中 $r = \min\{y - a, b - y\}, a < y < b, q > 0$. L^q 范数在 $[a,b]$ 上取,(Peter,B. 等[321]2000,316(2):39 - 60).

注 $Q_n(x)$ 与实系数代数多项式 $P_n(x)$ 的性质类似.

51. **EG 不等式(Erdös-Grunwald 不等式)**:设 $f(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 - x_k^2)\varphi(x)$, $|\varphi|$ 是 $A = (-1,1)^n$ 上对数凹函数. $c = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |1 - x^2|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$, 记 $\|f\|_{P,A} = \left(\frac{1}{\mu(A)}\int_A |f|^p\right)^{1/p}$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|: x \in A\}$,则

$$\|f\|_{P,A} \leqslant c\|f\|_\infty.$$

(Dryanov,D. 等.[302]1999,3(3):215 - 231)

52. **BW 不等式(Bernstein-Walsh 不等式)**:设 A 为 C^m 中非多极紧集,$P_n(z)$ 为 C^m 中 n 次复代数多项式. $V_A(z)$ 是 A 上的极值函数,例如当 $A = \{z = (z_1, \cdots, z_m): |z_k| \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant m\}$ 时,$V_A(z) = \max\{\log^+|z_1|, \cdots, \log^+|z_m|\}$,则

$$|P_n(z)| \leqslant \|P_n\|_A \exp[nV_A(z)]. \tag{1.15}$$

式中 $\|P_n\|_A$ 是P_n 是在A 上的一致范数. 2003 年,Dan Coman 等对(1.15)式作了进一步的改进和推广. 见[308]2003,131(3):879 - 887.

53. 设 $P_n(x)$ 是 n 次多项式,它的范数定义为

$\|P_n\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty}[P_n(t)]^2 e^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^{1/2}$,则

$$\|P'_n\|^2 \leqslant \frac{1}{2(2n-1)}\|P''_n\|^2 + \frac{2n^2}{2n-1}\|P_n\|^2,$$

仅当 $P_n(x) = cH_n(x)$ 时等号成立,式中 $H_n(x)$ 为 Hermite 多项式(见本章 §2,三.)

证明见[391]1987,49(1 - 2):169 - 172.

54. 设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ 的复根为 z_k,令 $\alpha_n = n + 1 - \sum_{k=1}^{n} e^{-z_k}$,则

$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2 - e, \alpha_3 = 3 - 2e\cos 1$,当 $0 < \beta < 1 - \ln 2 = 0.3068\cdots$ 时,对于充分大的 n,有

$$|\alpha_n| \leqslant e^{-\beta n}.$$

(Conrey,B.,Ghosh,A.,[305]1988,95:528 - 533)

55. 设 $P_n(z) = z^n + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$ 为复系数多项式. $z_k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 为 $P_n(z)$ 的零点,则

$$\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 \geqslant 2|a_2| \quad (\text{注意} \sum z_k = 0);$$

若 $w_k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 为 $P_n(z)$ 的导函数 $P'_n(z)$ 的零点,则

$$\sum_{k=1}^{n-1}|w_k|^2 \leqslant \frac{n-2}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2.$$

两个不等式中的等号仅当所有 z_k 都位于复平面上过原点的一条直线上时成立. 见[305]1987,94,(7):689.

56. 设 $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ 为 n 次复多项式,定义范数

$$\|P_n\|_q = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|P_n(e^{i\theta})|^q \mathrm{d}\theta\right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \max\{|P_n(z)|: |z| = 1\}, & q = \infty \\ \exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\log|P_n(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\right), & q = 0 \end{cases}$$

则:(1) **Zygmund 不等式**:$\|P'_n\|_q \leqslant n\|P_n\|_q$,仅当 $P_n(z) = cz^n$ 时等号成立.

(2) 设 $|z| < 1$ 时,$P_n(z) \neq 0$. 则对于 $0 \leqslant q \leqslant \infty$,有

$$\|P'_n\|_q \leqslant n\|P_n\|_q / \|1 + z^n\|_q$$

见[327]1988,53:26 - 32.

(3) **Aziz 不等式**:

设 $z_k = \exp(\frac{2k+1}{n}\pi i) \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 是 $z^n + 1 = 0$ 的全部根,记

$$M(P_n) = \max\{|P_n(z_k)|: 0 \leqslant k \leqslant n-1\}.$$

① 若 $P_n(1) = 0$,则

$$\max_{|z|=1}\left|\frac{P_n(z)}{z-1}\right| \leqslant \frac{n}{2}M(P_n) \leqslant \frac{n}{2}\|P_n\|_\infty;\ |P'_n(1)| \leqslant \frac{n}{2}M(P_n) \leqslant \frac{n}{2}\|P_n\|_\infty,$$

仅当 $P_n(z) = 1 - z^n$ 时等号成立.

② 若 $\beta \geqslant 0, P_n(\beta) = 0$,则

$$\max_{|z|=\beta}\left|\frac{P_n(z)}{z-\beta}\right| \leqslant \frac{1-\beta^n}{1-\beta^2}M(P_n) \leqslant \frac{1-\beta^n}{1-\beta^2}\|P_n\|_\infty;$$

$$|P'_n(\beta)| \leqslant \frac{1-\beta^n}{1-\beta^2}M(P_n) \leqslant \frac{1-\beta^n}{1-\beta^2}\|P_n\|_\infty$$

仅当 $P_n(z) = \left(\frac{z-\beta}{1-\beta z}\right)(1-\beta^n z^n) = (z-\beta)(1+\beta z+\beta^2 z^2+\cdots+\beta^{n-1}z^{n-1})$ 时等号成立. 上述不等式均不能再改进. 见[327]1984,41:15 - 20,和[339]1988,8(4):555 - 557.