第十一章　序列与级数不等式

§1　序列不等式

前面各章中,实际上包含了许多数列不等式.本章作进一步系统的论述,但在内容上不与前面重复.

1.　[MCM].设$\{a_n\}$为等差数列,首项$a_1>0$,公差$d>0$,则当$n\geqslant 2$时,有

$$2(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})<\frac{d}{\sqrt{a_n}}<2(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}).$$

提示:因为$a_{n+1}-a_n=d>0$,所以$a_{n+1}>a_n>0$,从而

$$2(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\frac{2(a_{n+1}-a_n)}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n}}<\frac{2d}{2\sqrt{a_n}}=\frac{d}{\sqrt{a_n}},$$

$2(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}})=\dfrac{2d}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}>\dfrac{d}{\sqrt{a_n}}$.李胜明的改进见[345]2000,3:28－29.

2.　设$\{a_k\}$成等差数列,公差$d>0$,则$a_k^2>a_{k-1}a_{k+1}$,$(k\geqslant 2)$.

3.　设$\{a_k\}$成等差数列,$a_k>0$,$k=1,\cdots,2n+1$,则

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_2a_{2n}}}<\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdots\frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}<\sqrt{\frac{a_1}{a_{2n+1}}}.$$

杨克昌改进为:当公差$d>0$时,

$$\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{a_1+a_4}{a_1+a_{4n}}\right)^{1/2}\leqslant\frac{a_1a_3\cdots a_{2n-1}}{a_2a_4\cdots a_{2n}}\leqslant\frac{a_1a_3}{a_2a_{2n+1}}\left(\frac{a_2+a_{4n+1}}{a_2+a_5}\right)^{1/2}.$$

若$d<0$,则不等号反向,仅当$n=1$时等号成立.见[345]2000,7:30－31.

4.　设$\{a_k\}$为等差数列,$a_k>0$,$k=1,2,\cdots,n+1$,公差$d>0$,则

(1)　$$\frac{n}{d}\left[\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}-1\right]<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<\frac{1}{a_1}+\frac{n-1}{d}\left[1-\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{1/(n-1)}\right].$$

(2)　$$0<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}-\frac{2}{3d}(a_n^{3/2}-a_0^{3/2})<\frac{1}{2}(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_0}).$$

5.　设$\{a_n\}$为等差数列,首项$a_1>0$,公差$d>0$,则

(1)　当$n\geqslant 2$时,有

$$\frac{1}{2\sqrt{a_n}}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}+\sqrt{a_k}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{a_1}};$$

(2)　当$n\geqslant 3$时,有

$$\frac{2a_n+\sqrt{2}d}{3d}\sqrt{a_n}-\frac{2a_2-(3-\sqrt{2})d}{3d}\sqrt{a_2}+\sqrt{a_1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}<\frac{4a_n+3d}{6d}\sqrt{a_n}-$$

$-\dfrac{4a_2-3d}{6d}\sqrt{a_2}+\sqrt{a_1}$.（李胜明，[345]2000，3:28－29.）

(3)　设 $a_1>d/2>0$，p 为正实数，则当 $n\geqslant m+1$ 时，成立

$$\left(\frac{2a_{n+1}+p}{2a_{m+1}+p}\right)^{p/d}\leqslant\prod_{k=m+1}^{n}\left(1+\frac{p}{a_k}\right)\leqslant\left(\frac{2a_n+d}{2a_{m+1}-d}\right)^{p/d}.$$

续铁权，[351]2003，2:16－19.

6.　设 $\{a_k\}$ 是等差正数列，公差 $d\geqslant 0$. 则当 $n\geqslant 2$ 时，有

$\sum\limits_{k=2}^{n}a_k^{-2}\leqslant((n-1)/2)(a_1a_n+a_2a_{n+1})/(a_1a_2a_na_{n+1})$ 仅当 $d=0$ 时等号成立.

特别，取 $a_k=k$，$(1\leqslant k\leqslant n+1)$，得

$$\sum_{k=2}^{n}(1/k^2)<\frac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}<1,$$

取 $a_k=2k-1$，$(1\leqslant k\leqslant n+1)$，得

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}<\frac{(n-1)(4n+1)}{3(4n^2-1)}<\frac{1}{3}.$$

7.　设 $\{a_k\}$ 为等差数列；$\{b_k\}$ 为等比数列，且 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，$a_1\neq a_2$，$a_k>0$　$(k=1,2,\cdots)$，则当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n<b_n$.（提示：用数学归纳法）.

8.　设 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 $a_1>1$，则当公差 $d>0$ 时，$\{\log_{a_n}a_{n+1}\}$ 是严格递减数列，即 $\log_{a_n}(a_n+d)>\log_{(a_n+d)}(a_n+2d)$.

注　自然数列 $\{n\}$ 可看成公差为 1 的等差数列；因此有关自然数 n 的不等式容易推广到以正的公差 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 上去. 另见第 2 章 §1，N2－3.

9.　[MCM] 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1/2$，$a_{k+1}=a_k+(a_k^2/n)$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，则

$$1-1/n<a_n<1.$$

这道数学竞赛题的命题者给出的证明太繁，前后用了四次数学归纳法，但若用“加强命题”手法，只用一次数学归纳法，就可证明

$$\frac{n+1}{2n-k+2}<a_k<\frac{n}{2n-k},\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

取 $k=n$，即得

$$1-\frac{1}{n}<\frac{n+1}{n+2}<a_n<1.$$

见[345]1982，3:33.

10.　设 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，$8/5\leqslant a_1\leqslant 9/5$，$(8/5)^2\leqslant a_2\leqslant(9/5)^2$，则对于所有 n，成立　$(8/5)^n\leqslant a_n\leqslant(9/5)^n$.

提示：用数学归纳法，还可证明　$\dfrac{5}{4}<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{5}{3}$.

11.　设 $\{a_n\}$ 满足 $a_1>\sqrt{\beta}$，$\beta>0$，$a_{n+1}=(a_n^2+\beta)/(2a_n)$，则 $a_{n+1}<a_n$，且当 $n>(2^{1/\alpha}-1)^{-1}$ 时，有

$$0<a_n-\sqrt{\beta}<n^{-\alpha}\quad(\alpha\geqslant 1).$$

这是计算机上常用的计算平方根的牛顿法. 特别,当 $\beta = 2$ 时,有$\sqrt{2} < a_n < 1 + \sqrt{2}$.

12. 设 $\{a_k\}$ 满足:$a_1 = 1$. 且 $n \geqslant 1$ 时 $a_{n+1} = a_n + a_n^{-1}$. 则$\sqrt{2n} < a_n < \sqrt{2n + (1/2)\ln n}$,$(n \geqslant 3)$, 当 $n > 4$ 时,下限$\sqrt{2n}$ 可改进为$\sqrt{2n + (1/2)\log(n/4)}$.

令 $G(n) = 2n + (1/2)\log n - a_n^2$,则 $G(n)$ 严格递增且上有界,从而

$\lim_{n\to\infty} G(n) = c$.

对于上述极限 c 提出了以下三个猜想:

① c 是超越数;

② 对任意整数 $m, n(n \neq 0)$,成立　$|c - m/n| > 1/(10n^2)$;

③ 对于任给正数 ε,有无穷多对素数 p, q,使得 $\left|c - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^{2-\varepsilon}}$.

见[348]1991.8. 当 $n \geqslant 14$,还有

$$0 < G(n+1) - G(n) < \frac{\log n}{8n^2};$$

$$0 < G(13) < G(14) < \cdots < G(n) < G(n+1) < G(13) + \sum_{k=13}^{n} \frac{1}{8k^2}(\log k).$$

见[67]P.12 和[305]1988,95(7):654;1990,97(3):244.

若取 $a_1 = 5$,得常见的估计式:$45 < a_{1000} < 45.1$.

13. 设 $1 < a_1 < 2, a_{n+1} = 1 + a_n - a_n^2/2$,,则当 $n \geqslant 3$ 时,有 $|a_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$.

14. 设 $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{2(a_n - 1)}$,则当 $2 < a_1 < 3$ 时,$0 < a_n - 2 < 2^{1-n}$,而当 $a_n > 3$ $(\forall n \in N)$ 时,$a_{n+1}/a_n < 3/4$,

提示:用数学归纳法.

15. [MCM] 设 $a_1 = \dfrac{1}{2}, a_n = \left(1 - \dfrac{3}{2n}\right)a_{n-1}, n \geqslant 2$,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < 1. \text{(1988 年 IMO 备选题)}.$$

提示:由条件知所有 $a_n > 0$ 且当 $k \geqslant 2$ 时 $a_k + (2k-1)a_k = (2k-3)a_{k-1}$. 在上式中依次令 $k = 2, 3, \cdots, n$ 然后相加.

16. 设 $a_1 = 3/8, a_n = a_1 + a_{n-1}^2/2$,则　$3/8 < a_{n-1} < a_n < 1/2$.

17. [MCM] 设 $a_1 > a_0, a_k = 3a_{k-1} - 2a_{k-2}$,则

$a_n \geqslant 2^n; a_{n+1} - a_n \geqslant 2^n$.(提示:用数学归纳法.)

18. [MCM] 设$\{a_n\}$ 是正的递减数列,且$\sum_{k=1}^{n}(1/k)a_{k^2} \leqslant 1$,则$\sum_{k=1}^{n} a_k/k \leqslant 3$.

19. 设 $0 < \beta < 1, a_1 = 1 + \beta, a_{n+1} = (1/a_n) + \beta$.

则　$1 < a_n < 1 + \beta, (n \geqslant 2)$.(提示:用数学归纳法.)

20. [MCM] 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = n/a_n$,则　$\sum_{k=1}^{n}(1/a_k) \geqslant 2\sqrt{n} - 1$.

21. [MCM] 设 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{a_n}, n \geqslant 1$,则　$\sqrt{n} < a_n < \sqrt{n} + 1$　$(n \geqslant 2)$.

提示:用数学归纳法.

22.　设 $a_1>0, a_{n+1}=a_1+(n/a_n)$.

(1)　当 $n>\frac{4}{a_1^3}$ 时,是否成立 $a_{n+1}>a_n$?(陈计提出见[31]P.116－123)

(2)　当 $a_1\geqslant 1$ 时,$\sqrt{n-1+\frac{a_1^2}{4}}+\frac{a_1}{2}\leqslant a_n\leqslant\sqrt{n+\frac{1}{4}a_1^2}+\frac{a_1}{2}, n\geqslant 1$.
见[305]1996,103(10):912.

23.　[MCM],设 $a_1=1, a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}$,则

$$\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}.$$

(天津"中等数学",1993,4:35).

24.　[MCM].设 $a_0=1, a_n=\frac{\sqrt{1+a_{n-1}^2}-1}{a_n-1}$,则 $a_n>\frac{\pi}{2^{n+2}}$　(1990 年匈牙利奥赛试题).

25.　[IMO].设 $a_0=\frac{\sqrt{2}}{2}, a_{n+1}=a_0\cdot\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}}, n=0,1,2,\cdots, b_0=1, b_{n+1}=\frac{\sqrt{-1+b_n^2}-1}{b_n}$.则

$2^{n+2}a_n<\pi<2^{n+1}b_n. n=0,1,2,\cdots$,(1989 年 30 届 IMO 预选题).

26.　[MCM].设 $a_k\geqslant 0, a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$,则对 $\forall n\geqslant m$,成立
$a_n\leqslant ma_1+(\frac{n}{m}-1)a_m$.特别,若 $a_1=1, a_n>1(n\geqslant 2)$ 且 $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$,则 $a_n<n$.

27.　[MCM].设 $\{a_k\}$ 满足 $a_n>0, a_n^2<a_n-a_{n+1}$,则 $a_n<\frac{1}{n+2}$　$(n\geqslant 2)$.

提示:用数学归纳法,或利用 $f(x)=x-x^2$ 在 $x\leqslant 1/2$ 时递增,于是,

$$a_{k+1}\leqslant a_k-a_k^2<\frac{1}{k+2}-(\frac{1}{k+2})^2=\frac{k+1}{(k+2)^2}<\frac{1}{k+3}.$$

28.　**Khinchin 不等式**:设 $\{a_k\}$ 为复数列.$\varepsilon_k=\pm 1, 1\leqslant k\leqslant n, c>1$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}\leqslant c2^{-n}\sum_{\{\varepsilon_k\}}\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k\right|,$$

式中 $\sum_{\{\varepsilon_k\}}$ 表示对所有 $\varepsilon_k=\pm 1$ 求和,见[125]Vol.1:186.

29.　(1)　[MCM].设 $S_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$　(n 个根号),令

$$f(n)=\frac{2-S_n}{2-S_{n-1}}.\text{则}\quad \frac{1}{4}<f(n)<\frac{\pi^2}{27};\quad S_n<S_{n+1}<2.$$

证　令 $a_n=\frac{\pi}{2^{n+2}}$,则 $S_n=2\cos(2a_n)$.问题变成要证 $\sqrt{f(n)}=\frac{\sin a_n}{\sin(2a_n)}>\frac{1}{2}$.

(2)　问题:若 $a>1$,令 $S_n=\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}$($n$ 个根号).

$g(n)=\dfrac{a-S_n}{a-S_{n-1}}$,问 $g(n)$ 的最优上、下界是多少?

已知 $a>0$ 时,S_n 递增且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{2}(\sqrt{4a+1}+1)$.

(3)　设 $a\geqslant 2$, $S_1=\sqrt{a}$, $S_2=\sqrt{a-\sqrt{a}}$, $S_3=\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, $S_4=\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}$,…,这里,根号套中符号序列 −, +, +,… 按周期 3 出现,则

$$S_{6n+4}<S_{6n+3}<S_{6n+2}<S_{6n+1};S_{6n+4}<S_{6n+5}<S_{6n+6}<S_{6n+7};$$

$$0<S_4<S_{10}<\cdots<S_{6n+4}<S_{6n+7}<S_{6n-1}<\cdots\cdots<S_7<S_1=\sqrt{a}.$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\beta-1}{6}+\frac{2}{3}\sqrt{4a+\beta}\sin\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\beta+1}{3\sqrt{3}}\right).$$

式中 $\beta=\sqrt{4a-7}$.见[305]1993,100(7):650.

30.　设 $a_0=1$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$,则

$0<2-a_n<\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^n}$.(提示:用数学归纳法.)

31.　[MCM].设 $S_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}$,则 $S_{n+1}-S_n<\dfrac{1}{n!}$　$(n=2,3,\cdots)$

(1985 年 IMO 备选试题).[99](3):49.

32.　设 $a_0=1$, $a_{n+2}=\sin a_n$,则

$$\frac{1}{\sqrt{3n+2}}\leqslant a_n\leqslant\sqrt{\frac{5}{n}}.$$

33.　设 $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{9a_n}{6+a_n}$,则当 $n\geqslant 2$,成立

$$3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2}\right]<a_n<3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].(见[348]1990,10:33.).$$

34.　[MCM].设 $1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots$,令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}},$$

则　$0\leqslant S_n<2$, $(n=1,2,\cdots)$.

证　$0\leqslant S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\dfrac{1}{a_{k-1}}-\dfrac{1}{a_k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$

$$\leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{a_0}}-\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)<2.$$

35.　设 $F_n(x)=\dfrac{1}{n!}\prod\limits_{k=1}^{n}(k-x)$, $n\geqslant 2$, $I(n)=\int_0^1F_n(x)\mathrm{d}x$,则当 $n\geqslant 2$ 时,有

$I(n)>\dfrac{1}{2\ln 2n}$,　从而　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}I(n)=+\infty$.(Gabovic,[4]P494)

36.　设 $a>0$, f 在 $[a,\infty)$ 上严格递减和严格凸,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $xf(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上

是凹函数. 令 $a_n=\sum_{k=n_0}^{n}f(k)-\int_{n_0}^{n}f(x)\mathrm{d}x,\lim_{n\to\infty}a_n=l$. 则

$$\frac{f(n)}{2+(1/n)}<a_n-l<\frac{f(n)}{2}.$$

(见 Astra Mat. 1990, 1(3): 3 – 7)

37. **凸序列不等式**: 设 $\{a_n\}$ 为实数列, $\Delta a_n=a_n-a_{n+1},\Delta^2a_n=\Delta a_n-\Delta a_{n+1}$ 若 $\Delta^2a_n\geqslant 0$, $(\forall n)$, 则称 $\{a_n\}$ 为**凸序列**; 更一般地, 若 $\forall 1\leqslant m<k<n$, 成立 $a_k\leqslant\frac{k-m}{n-m}a_n+\frac{n-k}{n-m}a_m$, 则称 $\{a_n\}$ 为凸序列; 若 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\mid\Delta^2a_n\mid<\infty$, 则称 $\{a_n\}$ 为**拟凸序列**; 若 $\sum_{n=0}^{\infty}\mid\Delta a_n\mid<\infty$, 则称 $\{a_n\}$ 为有界变差序列, 记为 $\{a_n\}\in BV$. 若 $\{a_n\}$ 是有界拟凸序列, 则 $\{a_n\}\in BV$ 且 $\{n\Delta a_n\}$ 是有界序列. 令

$L_r(a_n)=a_{n+2}-(r+1)a_{n+1}+ra_n(r>0)$.

这是 $L_1(a_n)=\Delta^2a_n$ 的推广. 若 $L_r(a_n)>0$, 则称 $\{a_n\}$ 关于算子 $L_r(a_n)$ 是凸的; 若 $L_r(\ln a_n)\geqslant 0$, $(\forall a_n>0)$, 则称 $\{a_n\}$ 关于 $L_r(a_n)$ 是对数凸的 (Copson, E. T., Proc. Edinb. Math, Soc. Ⅱ Sec. 1970, 17: 159 – 164).

若 φ 是 $(0,\infty)$ 上的凸函数, 则 $a_n=\varphi(n)$ 为凸序列.

(1) [IMO]. (29 届 IMO 备选题): 设 $\{a_n\}$ 为非负凸序列, 且 $\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant 1$, 则

$$0\leqslant a_n-a_{n+1}<2/n^2.$$

提示: 令 $b_n=\Delta a_n$, 由条件可推出 $\{a_n\}$ 递减且 $b_n\geqslant b_{n+1}\geqslant 0, 1\geqslant\sum_{k=1}^{n}a_k\geqslant\sum_{k=1}^{n}(kb_k)\geqslant(\sum_{k=1}^{n}k)b_n=(1/2)n(n+1)b_n$.

(2) 设 $\{a_n\}$ 为严格凸序列, 即 $a_n>0,\Delta a_n>0,\Delta^2a_n>0$, 则

$$\frac{a_0}{2}<\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^ka_k<a_0-\frac{1}{2}a_1.$$

(3) **Nanson 不等式**: 设 $\{a_n\}$ 为凸序列, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{2k}\leqslant\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_{2k+1},$$ 仅当 $\{a_n\}$ 为等差数列时等号成立.

提示: 对 $k(n-k+1)\Delta^2a_{2k-1}\geqslant 0$ 与 $k(n-k)\Delta^2a_{2k}\geqslant 0$ 求和. (见[1]P. 107.) 1989 年, Adamovic, D. D. 作了推广, 见 Math, Balkanica (N. S.) 1989, 3(1): 3 – 11.

(4) 设 $\{a_n\}$ 是有界凸序列, 则

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta^2a_k\leqslant a_0.$$

(5) 设 $\{a_n\}$ 为凸序列, $\{p_k\}$ 是正的对称序列, 即 $p_k=p_{n-k+1},k=1,\cdots,n$. $[r]$ 表示 r 的整数部分. 记 $r_1=[(n+1)/2],r_2=[(n+2)/2]$, 则

$$\frac{1}{2}(a_{r_1}+a_{r_2})\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}p_ka_k}{\sum_{k=1}^{n}p_k}\leqslant\frac{1}{2}(a_1+a_n).$$

(见 Toader,Gh.,Rev. Anal. Numer. Theor. Approx. 1992,21(1):83 - 88)

38. **高阶凸序列不等式**:设$\{a_n\}$为实数列,令

$\Delta^{\circ}a_k = a_k,\Delta^1 a_k = \Delta a_k = a_{k+1} - a_k$.(注意定义与 N37 不同).

$$\Delta^m a_k = \Delta(\Delta^{m-1}a_k) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}a_{n+k}, m = 2,3,\cdots,$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{m}a_k,\quad \sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k.$$

(1) 若$\Delta^j a_k > 0\ (j = 0,1,\cdots,m),\Delta^{\circ}a_1 = a_1,\Delta^{m+1}a_k = 0$.则

$$\left(1+\frac{N}{n}\right) < \frac{S_{N+n}}{S_n} < \binom{N+n}{m+1}\Big/\binom{n}{m+1}.$$

(Markovic,D.,Bull. Soc. Math. Phys. Serbie,1949,1(2):17 - 21)

(2) 设$b\geqslant -1,(-1)^n\Delta^n a_0 > 0$,且$(-1)^{n-k}\Delta^{n-k}a_k\geqslant 0,k = 1,\cdots,n$.则

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k a_k > 0.$$

(3) 若$b\leqslant -1,\Delta^n a_0 > 0$,且$\Delta^{n-k}a_k\geqslant 0,k = 1,\cdots,n$,则

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k a_k > 0.$$

(4) 设$b\geqslant -1,f_k$在$[0,n]$上连续,在$(0,n)$上n次可微,且$f_k(n)<0,k = 1,\cdots,m,j = 1,\cdots,n$.若 $(-1)^j f_k^{(j)}(x)\geqslant 0,n-j < x < n$,则

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}b^j\prod_{k=1}^{m}f_k(x) > 0.$$

(N(2) ~ (4),见 Drazin,M.P.,[305]1955,62:226 - 232)

(5) 若存在常数m_k,M_k使得$m_k\leqslant\Delta^k a_n\leqslant M_k,n = 0,1,2,\cdots$,则

$$\frac{1}{k+1}m_k\leqslant\Delta^k\sigma_n\leqslant\frac{1}{k+1}M_k.$$

(见[305]1985,92(6):428)

39. 设$1/2 < a < 2,b_n = (a^n + a^{-n})/2$,则

$$\sum_{k=1}^{n}b_k < 2^n - 2^{-1}.$$

40. 设$a_{n_0} > b_{n_0}$,且对所有$n > n_0$,有$a_n - a_{n-1}\geqslant b_n - b_{n-1}$,则对所有$n\geqslant n_0$,有

$$a_n\geqslant b_n.$$

41. 设$a_n > 0,b_n > 0,a_{n_0} > b_{n_0}$,且当$n > n_0$时$a_n/a_{n-1}\geqslant b_n/b_{n-1}$,则

$$a_n\geqslant b_n\quad(n\geqslant n_0).$$

见[348]1989,12:18－20.

42. 设正数 a_k,b_k,满足 $a_{2k-1}<b_{2k-1}<b_{2k}<a_{2k},1\leqslant k\leqslant n;a_{2k-1}+a_{2k}=b_{2k-1}+b_{2k}$,则

(1) $\sum\limits_{k=1}^{2n}(\sqrt[n]{b_k}-\sqrt[n]{a_k})>0$; (2) $\sum\limits_{k=1}^{2n}(b_k^{-1/n}-a_k^{-1/n})<0$;

(3) $\sum\limits_{j=2}^{n}\sum\limits_{k=1}^{2n}(b_k^{1/j}-a_k^{1/j})>0$; (4) $\sum\limits_{j=2}^{n}\sum\limits_{k=1}^{2n}(b_k^{-\frac{1}{j}}-a_k^{-\frac{1}{j}})<0$.

43. [MCM].设 $a_1=1,a_k=a_{k-1}+(a_{k-1})^{-1}$,则

$$\sqrt{2n-1}<a_n<\sqrt{3n-2}.$$

证 当 $k>1$ 时,$a_k^2=a_{k-1}^2+2+a_{k-1}^{-2}$,且 $a_k>1$,于是 $a_{k-1}^2+2<a_k^2<a_{k-1}^2+3$, $1\leqslant k\leqslant n$,将这些不等式相加即可得证.

44. [MCM].已知在数 $\{a_k\}_{k=1}^n$ 中,$1,1/2,1/3,\cdots,1/n$ 只出现 1 次,且在数 $\{b_k\}_{k=1}^n$ 中也只出现一次.此外,还已知 $a_k+b_k\geqslant a_{k+1}+b_{k+1},1\leqslant k\leqslant n-1$,则 $a_k+b_k\leqslant 4/k$. $(1\leqslant k\leqslant n)$.

证 在 m 个数对 $(a_k,b_k)(1\leqslant k\leqslant m)$ 中,$a_k\geqslant b_k$ 或 $b_k\geqslant a_k$ 中之一成立的个数不少于 $m/2$ 对.例如,设 $b_k\geqslant a_k$ 是在不少于 $m/2$ 个数对中成立的不等式,若 b_i 是这些 b_k 的最大值,则 $b_i\leqslant 2/m$.所以 $a_i+b_i\leqslant 2b_i\leqslant 4/m$,又 $i\leqslant m$,故 $a_m+b_m\leqslant a_i+b_i\leqslant 4/m$.

45. [MCM].有序数组 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 由下面的条件确定:$a_1=0$,

$$|a_k|=|a_{k-1}+1|,\ 2\leqslant k\leqslant n. \quad 则 \quad \sum_{k=1}^{n}a_k\geqslant -n/2.$$

提示:将原式平方再相加,化简后得 $a_{n+1}^2=2(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k)+n\geqslant 0$.

46. [MCM].设 $\{a_k\}$ 严格递增无界,则存在 N,使 $\forall\, n\geqslant N$.有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{a_{k+1}}<n-1.$$

47. [IMO].设 $\{a_k\}$ 为递增数列,$a_0=1$,令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{x_{k-1}^2}{x_k}\right)$,则当 $n\geqslant 14$ 时,$S_n\geqslant 2^{\alpha}$,式中 $\alpha=\sum\limits_{k=0}^{n-2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

48. 设 $a_0=0,\{a_n\}$ 递增,$\{a_n-a_{n-1}\}$ 递减,则 $\{a_n/n\}$ 也递减.

49. [MCM].设 $\{a_n\}$ 满足 $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant 2a_1,a_2\leqslant a_3\leqslant 2a_2,\cdots,a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 2a_{n-1}$,则在和 $S=\sum\limits_{k=1}^{n}(\pm a_k)$ 中可以适当选择正负号,使得 $0\leqslant S\leqslant a_1$.

证 用数学归纳法.$n=1$ 时,结论显然成立,今设对于 n 个数 $a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$,存在形如和 $S'=\sum\limits_{k=2}^{n}(\pm a_k)$ 满足 $0<S'<a_2$,则 $0\leqslant S'\leqslant a_1$,此时 $0\leqslant S=a_1-S'\leqslant a_1$ 或 $a_1<S'\leqslant a_2\leqslant 2a_1$,于是 $S=S'-a_1\leqslant a_2-a_1\leqslant a_1$ 都是所求的解.

50. [MCM].设 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 是 n 个互不相同的实数,令 $M=\min\{(a_j-a_k)^2$:

$1 \leqslant j < k \leqslant n\}$,则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geqslant \frac{nM}{12}(n^2-1).$$

(单墫在[99]6-9:12－14给出了三种不同的证法.)

51. (1) 由$\{a_k\}$与$\{b_k\}$构造两个新的数列:

$$A_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ a_1, & k=1 \\ a_kA_{k-1}+A_{k-2}, & k \geqslant 2 \end{cases} \qquad B_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ b_1, & k=1 \\ b_kB_{k-1}+B_{k-2}, & k \geqslant 2 \end{cases}$$

$r>1$,s为非负整数,若$\forall k \geqslant s+1$,有$a_k \geqslant rb_{k-s}$,且当$k \geqslant 2$时,$b_k \geqslant 2$,则当$k \geqslant s$时,成立$A_k \geqslant r^{\alpha}B_{k-s}$,式中$\alpha=(k-s)/2$.证明见[345]1990,2.

(2) 设数列$\{x_n\}$满足条件:$|x_{n+1}| \leqslant p|x_n|+q$,$n=0,1,2,\cdots$,则

$$|x_n| \leqslant p^n|x_0| + \begin{cases} \alpha q, & p \neq 1, \\ nq, & p=1. \end{cases}, \quad 式中\ \alpha=\frac{p^n-1}{p-1}.$$

52. [MCU].设$0 \leqslant f(k,m) \leqslant 1$,$1 \leqslant k \leqslant n$,$1 \leqslant m \leqslant kN$,则

$$\sum \left(\frac{f(k,m)}{k}\right)^2 \leqslant 2N\sum f(k,m).$$

式中$\sum$是对所有可能的数对(k,m)求和.

提示:令$a_k=\dfrac{1}{k}\sum_{m=1}^{kN} f(k,m)$,则$0 \leqslant a_k \leqslant N$,用数学归纳法证明与原命题等价的命题:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant 2N\left(\sum_{k=1}^{n}(ka_k)\right).$$

(第39届普特南数学竞赛,见[66],P.409,475－476)

53. 设$\{a_n\}$由方程$\exp(e^x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$确定,则

$$(e \cdot \ln n)^{-n} < a_n < \left(\frac{e}{\ln n}\right)^n.$$

见[67]P12,75－77.

54. 设$\{a_n\}$是非负递减数列,令$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$,则$S_{2^n-1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} 2^k a_{2^k} \leqslant 2S_{2^n}-2^na_{2^n}$.

提示:用数学归纳法.

55. 设$a_k \geqslant 0$,$q>0$,令$S_n(q)=\dfrac{1}{(n+1)^{q+1}}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^q a_k$则存在常数$c_q>0$,使得

$$\sup_n\{S_n(0)\} \leqslant c_p \sup_n\{s_n(q)\}.(转引[334]1984,27(6):813).$$

56. 设$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})$,$x \geqslant 1$,$a>0$,$a \neq 1$,令$b_n=f^{-1}(n)$,$S_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$,则当$\dfrac{1}{2}<a<2$时,$S_n<2^n-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.(见[345]1991,12:19.)

57. 设$\{x_k\}$为实数或复数列,$1 \leqslant m \leqslant n$.$\|x\|=\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}$,$r=2\left(\left[\dfrac{n}{m}\right]+1\right)$.

则：

(1) $0 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-m} |x_k \pm x_{k+m}|^2\right)^{1/2} \leqslant c_1 \|x\|$；

(2) $c_2 \|x\| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k \pm x_{k+m}|^2\right)^{1/2} \leqslant c_3 \|x\|$；

式中 $x_{n+1} = \cdots = x_{n+m} = 0$；

(3) $c_2 \|x\| \leqslant \left(\sum_{k=-m}^{n-m} |x_k \pm x_{k+m}|^2\right)^{1/2} \leqslant c_3 \|x\|$，

式中 $x_{-m} = \cdots = x_{-1} = 0$；

(4) $c_4 \|x\| \leqslant \left(\sum_{k=-m}^{n} |x_k \pm x_{k+m}|^2\right)^{1/2} \leqslant c_3 \|x\|$，

式中 $x_{-n} = \cdots x_{-1} = x_{n+1} = \cdots = x_{n+m} = 0$；$c_1 = 2\cos(\pi/r)$；

$$c_2 = 2\sin\frac{\pi}{2(r+1)};c_3 = 2\cos\left(\frac{\pi}{r+1}\right);c_4 = 2\sin\left(\frac{\pi}{r+2}\right).$$

(见[54]5:73 − 85)

58. **FTT 不等式(Fan − Taussky − Todd 不等式)**：设 $z_1,\cdots,z_n$ 为复数，令 $\Delta z_k = z_k - z_{k+1}$，$\Delta^2 z_k = z_k - 2z_{k+1} + z_{k+2}$，$z_0 = z_n$，$z_{n+1} = z_1$，

$$\|z\|_r = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^r\right)^{1/r}, \|\Delta z\|_r = \left(\sum_{k=1}^{n} |\Delta z_k|^r\right)^{1/r},$$

$$\|\Delta^2 z\|_r = \left(\sum_{k=1}^{n} |\Delta^2 z_{k-1}|^r\right)^{1/r}, 1 \leqslant r < \infty, \|z\|_\infty = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |z_k|.$$

(1) 若 $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$，则 $\forall m \in N$，成立

$$\|z\|_m \leqslant \left(\frac{n-1}{2}\right)\|\Delta z\|_m;\ \|z\|_m \leqslant \frac{1}{12}(n^2-1)\|\Delta^2 z\|_m.$$

(2) 设 $a = \{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 是具有周期为 n 的序列，对任意数列 $b = \{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，令 $S_m = \sum_{k=1}^{n} a_{k+m}b_k$ ，$m = 1,2,\cdots,n$. 则 $\forall r \in N$，成立

$$\|S\|_r = \left(\sum_{k=1}^{n} |S_k|^r\right)^{1/r} \leqslant \|a\|_r \cdot \|b\|_1.$$

(3) 若 $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 为实数列，且 $\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$，$\|x\|_\infty = 1$，$x_{n+1} = x_1$，则

$$\|\Delta x\|_\infty \geqslant c_n.$$

式中当 $n = 2m$ 为偶数时，$c_n = \dfrac{4}{n}$；而当 $n = 2m-1$ 为奇数时，$c_n = \dfrac{4n}{n^2-1}$.

上述(1)是 Bellman 不等式的离散类似，(3)是 Northcott 不等式的离散类似.

证明见 Monatshefte für mathematik，1955，59(2)：73 − 90.

59. [MCM]. 设 $(0,\infty)$ 上的函数列 $\{f_n\}$ 由下式定义：$f_1(x) = x$，$f_{n+1}(x) = (f_n(x) + 1/n)f_n(x)$，则存在惟一的正数 a，使得对于所有 n，$0 < f_n(a) < f_{n+1}(a) < 1$.

60. [MCM]. 设 $x > 0$，定义

$$f_n(x)=x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}\}\text{共 } n \text{ 个 } x.$$

则对所有 $k\geqslant 3$，$f_{n+1}(k)>2f_n(k+1)$.（用数学归纳法）.

1983 年，孙传昆证明：当 $1\leqslant x<\exp(1/e)$ 时，$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$；而当 $0<x<1$ 时，有 $f_1(x)<f_3(x)<\cdots<f_{2n-1}(x)<\cdots<f_{2n}(x)<\cdots<f_2(x)$. 见[345]1983,5:28－29.

61. [MCM]. 设 $A_n=3^{3^{\cdot^{\cdot^{3}}}}\}n$ 个 3；$B_n=8^{8^{\cdot^{\cdot^{8}}}}\}n$ 个 8，则对所有 n，有

$$A_{n+1}>B_n. \tag{1.1}$$

证　直接用数学归纳法证(1.1)式就很困难，可通过"加强命题"技巧，证明

$$A_{n+1}>3B_n. \tag{1.2}$$

实际上，$n=1$ 时(1.2)式显然成立，设 $n=k$ 时(1.2)式成立，即 $A_{k+1}>3B_k$，于是当 $n=k+1$ 时，$A_{k+2}=3^{A_{k+1}}>3^{3B_k}=27^{B_k}>24^{B_k}=3^{B_k}\cdot 8^{B_k}>3B_{k+1}$.

62. 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_n=f(x_{n-1})$ 递归定义，f 连续且有不动点 a，（即 $f(x)=x$ 有实根 a）. 当 f 是递增函数时，若 $x<a$ 时，$f(x)>x$，而 $x>a$ 时 $f(x)<x$，则当 $x_1<a$ 时，$\{x_n\}$ 是递增数列，而当 $x_1>a$ 时，$\{x_n\}$ 是递减数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；当 f 是递减函数时，若 $x<a$ 时，有 $f[f(x)]>x$，而 $x>a$ 时，有 $f[f(x)]<x$，则

$x_1<x_3<\cdots<x_{2n-1}<\cdots<a<\cdots<x_{2n}<\cdots<x_4<x_2$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

利用不动点原理，可以统一证明许多由递推关系式确定的数列不等式，例如，

(1)　设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}$，$a>0$，则当 $0<x_1<\sqrt{a}$ 时，$x_n<x_{n+1}<\sqrt{a}$，$x_1>\sqrt{a}$ 时，不等号反向.

提示：找 $f(x)=\dfrac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}$ 的不动点.

(2)　设 $a>0$，$x_1=\sqrt[3]{a}$，$x_n=\sqrt[3]{ax_{n-1}}$，则当 $a>1$ 时，$x_n<x_{n+1}<\sqrt{a}$，而当 $0<a<1$ 时，不等号反向.（提示：找 $f(x)=(ax)^{1/3}$ 的不动点 .）

(3)　设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$，则当 $x_1<\sqrt{3}$ 时，$x_n<x_{n+1}<\sqrt{3}$，而当 $x_1>\sqrt{3}$ 时，不等号反向.

63. (1) 设 $a,b,c>0$，$a+b+c=1$，$x_0,y_0,z_0>0$，x_n,y_n,z_n 的加权算术平均，加权几何平均，加权调和平均依次定义为：$x_{n+1}=ax_n+by_n+cz_n$，$y_{n+1}=x_n^a y_n^b z_n^c$，$z_{n+1}=\left(\dfrac{a}{x_n}+\dfrac{b}{y_n}+\dfrac{c}{z_n}\right)^{-1}$，则 $z_{n+1}\leqslant y_{n+1}\leqslant x_{n+1}$，且 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 均收敛于同一极限.

（见[371]1993,66(3)）

(2)　**Schwab 数列不等式**：由关系式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$ 与 $b_{n+1}=\sqrt{b_n a_{n+1}}$，$n=0,1,2,\cdots$，$a_0,b_0>0$ 所定义的数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 称为 **Schwab 数列**，不妨设 $b_0>a_0>0$，则 $\{a_n\}$ 递增上有界，$\{b_n\}$ 递减下有界，且 $a_0<a_1<\cdots<a_{n+1}<a_{n+2}<b_{n+2}<b_{n+1}<\cdots$

$< b_0 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(黄友谦,"初等数学研究论文选",上海教育出版社,1992,P207 - 222)

64. 设 $\forall y_k, q_k > 0$,且$\left\{\dfrac{x_k}{y_k}\right\}$ 和$\left\{\dfrac{p_k}{q_k}\right\}$ 同时递增或递减,则

$$\left(\sum_{k=1}^{n} p_k y_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} q_k y_k\right).$$

(Toader, Gh., Rev. Anal. Numer. Theor. Approx. 1992, 21(1):83 - 88)

65. **Meir 不等式**:设$\{a_k\}$,$\{p_k\}$ 为递增数列,即

$$0 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n, a_k - a_{k-1} \leqslant p_k, k = 1, \cdots, n;$$

$$p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n, r \geqslant 1, q_k = \frac{1}{2}(p_k + p_{k+1}), k = 1, \cdots, n-1,$$

$$s + 1 \geqslant 2(r+1),\text{令}$$

$$F(s) = \left((s+1)\sum_{k=1}^{n-1} q_k a_k^s\right)^{1/(s+1)},\text{则 } F(s) \leqslant F(r).$$

(Pecaric, J. E. [401]1992, 22(1):329 - 330)

66. **Fourier 系数不等式**:设 f 的 Fourier 系数第 n 部分和为

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \exp(ikx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

式中 $c_k = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x, a_k = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx, b_k = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx$.

以下若特别声明 f 定义在$[-\pi,\pi]$上,则上述 c_k, a_k, b_k 中的积分限都从$[0,2\pi]$改为$[-\pi,\pi]$.

(1) 若 f 是$[0,2\pi]$上的凸函数,则 $a_k \geqslant 2$;若 f 是$[-\pi,\pi]$上的凸函数,且 $f'(x)$ 有界,则 $a_{2k} \geqslant 0, a_{2k+1} \leqslant 0$.

(2) 若 f 在$[0,2\pi]$上递减,则 $b_k \geqslant 0$;若 f 在$[-\pi,\pi]$上递减,则 $b_{2k} \geqslant 0, b_{2k+1} \leqslant 0$.

提示:用积分第二中值定理.

(3) 若 f 在$(0,2\pi)$上的导数 f' 递增有界,则 $a_n \geqslant 0$ $(n > 0)$.

(4) 设 f 是以 2π 为周期的连续函数,则

$$|c_k| \leqslant 1/2\omega(f, \pi/|k|), |a_k|, |b_k| \leqslant \omega(f, \pi/k),$$

式中 $\omega(f,h) = \sup\{|f(x) - f(y)|: |x - y| < h\}$ 为 f 的连续模.

(5) 设 $f \in C_{2\pi}$,则

$$\frac{|a_0|}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|) \leqslant \sqrt{2(2n+1)}\,\|f\|_c.$$

(6) 若 f 是以 2π 为周期的局部可积函数,则

$$|c_k| \leqslant \frac{1}{4\pi}\omega_1(f, \pi/|k|);\ |a_k|, |b_k| \leqslant \frac{1}{2\pi}\omega_1(f, \pi/k),$$

式中 $\omega_1(f,\delta)$ 是 f 的积分连续模:

$$\omega_1(f,\delta) = \sup\left\{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)|\,\mathrm{d}x : 0 \leqslant h \leqslant \delta\right\}.$$

(7) 设 f 在$[0,2\pi]$上有 k 阶连续导数,并且以 2π 为周期,则

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2n^k}\omega\left(f^{(k)},\frac{\pi}{n}\right)(n>0).$$

(8) 若 $f^{(k)}$ 是$[0,2\pi]$上有界变差函数,则

$|c_n| \leqslant \dfrac{1}{\pi}n^{-k}V_0^{2\pi}(f^{(k)})$,式中 $V_0^{2\pi}(f^{(k)})$ 是 $f^{(k)}$ 在$[0,2\pi]$上的全变差.

(9) 若 $f^{(k)}$ 在$[0,2\pi]$上既连续又属于 Lipα $(k \geqslant 1, 0<\alpha\leqslant 1)$,则

$$|a_n|,\ |b_n| \leqslant cn^{-(k+\alpha)}.$$

(10) **Caratheodory 不等式**:设 f 以 2π 为周期、非负且不恒等于 0,则 $|a_n| < a_0$, $|b_n| < a_0$, $|c_n| < a_0 (n \neq 0)$. 见[57]Vol.1 P.71.

(11) **Rogosinski 不等式**:设 f 在$(0,\pi)$上是非负的奇函数,且不恒等于 0,则 $|b_n| < nb_1$, $(n=2,3,\cdots)$ 见[57]Vol.1 P.71.

(12) 设 $f \in L^2[0,2\pi]$, $\beta_n = \sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{c_{n-k}}{k}$,则

$$\sum_n |\beta_n|^2 \leqslant \pi^2 \sum_k |c_k|^2.$$

提示:令 $g(x) \sim \sum\limits_{k\neq 0}\dfrac{1}{k}\exp(ikx) = i(\pi - x)$, $0<x<2\pi$,则 β_n 是 fg 的 Fourier 系数,而且有 $\|fg\|_2 \leqslant \pi\|f\|_2$,即

$$\int_0^{2\pi}|fg|^2 \leqslant \pi^2\int_0^{2\pi}|f|^2.$$ 见[15]P.261.

(13) 设 $f \in L\ln L(T)$, $T=(-\pi,\pi]$,则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{|c_k|}{|k|+1} \leqslant c_1 + c_2\int_T |f(x)|\log^+|f(x)|\,\mathrm{d}x.$$ (见[87]P.162.)

(14) **HL 不等式(Hardy - Littlewood 不等式)**:设 $f \in L^p(-\pi,\pi)$, $1<p\leqslant 2$,则

$$\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^p(|k|+1)^{p-2}\right\}^{1/P} \leqslant A_p\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}; \tag{1.3}$$

反之,若复数列$\{c_k\}$满足

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^q(|k|+1)^{q-2} < \infty,\ q \geqslant 2,$$

则 c_k 必为某个 $f \in L^q$ 的 Fourier 系数,且

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqslant A_q\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^q(|k|+1)^{q-2}\right\}^{1/q}. \tag{1.4}$$

见[57]Vol,2.P.109 - 110.另见下节 N.47(3).

注重:$p=1$ 时,(1.3)式不成立,替代的结果是下述著名的 Hardy 不等式.

(15) **Hardy 不等式**:若 $f \in H^1(T)$,则

$$\sum_{k\neq 0}\frac{|c_k|}{k} \leqslant A_1\|f\|_{H^1}.$$

式中 T 为单位圆周.

证 定义在 T 上的函数 $a(x)$ 称为 $(1,\infty,0)$ 原子，指 $a(x)$ 满足

i) a 的支集 $\operatorname{supp} a \subset I \subset [-\pi,\pi)$;

ii) $\|a\|_\infty \leqslant |I|^{-1}$;

iii) $\int_I a(x)\mathrm{d}x = 0.$

其中 I 是中心在 x_0 的区间，$|I|$ 表示区间 I 的长，根据 Hardy 空间的实变理论(例如见[87])，只要对任意 $(1,\infty,0)$ 原子 a，证明

$$\sum_{k\neq 0} |c_k(a)| \leqslant c.$$

实际上，利用 $(1,\infty,0)$ 原子 $a(x)$ 满足的三个条件有：

$$|c_k(a)| = \left|\int_I a(t)\exp(-2\pi ikt)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_I a(t)[\exp(-2\pi ikt)-1]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant 2\pi|k|\int_I |a(t)||t|\mathrm{d}t \leqslant 2\pi|k||I|.$$

所以，$\dfrac{1}{|k|}|c_k(a)| \leqslant 2\pi|I|.$

$$\sum_{l\neq 0}\frac{1}{k}|c_k(a)| = \sum_{0<|k|<|I|^{-1}}\left(\frac{1}{k}|c_k(a)|\right) + \sum_{|k|\geqslant|I|^{-1}}\left(\frac{1}{k}|c_k(a)|\right) = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

$\sum_1$ 至多有 $|I|^{-1}$ 项，所以，$\sum_1 \leqslant 2\pi|I|\cdot|I|^{-1} = 2\pi$，利用 Cauchy 不等式和 Parseval 等式，有

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \Big(\sum_{|k|\geqslant|I|^{-1}}|c_k(a)|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{|k|\geqslant|I|^{-1}}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}.$$

$$\leqslant c\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(a)|^2\Big)^{1/2} = c\left(\frac{1}{|I|}\int_I |a(t)|^a\mathrm{d}t\right)^{1/2} = c$$

于是 $\displaystyle\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k}|c_k(a)| \leqslant c.$

由此可见，上述方法比 Hardy 原来用的复方法(见[85]P.91.)要简捷得多.

见[376]1977,83(4):569－645.

(16) **Paley 不等式**：设 $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\exp(ikx) \in H^1$，$\{\lambda_k\}$ 为 Hadamard 序列，即 $\inf\limits_k(\lambda_{k+1}/\lambda_k) > 1$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_{\lambda_k}|^2 \leqslant c\|f\|_{H^1}^2，见[87]384.$$

(17) 设 f 以 2π 为周期，且 $f \in \operatorname{Lip}a$，即 $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|^a$ $(0 < a \leqslant 1)$，则 $|a_n| \leqslant cn^{-a}$，$|b_n| \leqslant cn^{-a}$；

若 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上分段单调有界，则 $|a_n| \leqslant c/n$，$|b_n| \leqslant c/n$.

67. **Schur 不等式**：设 $a_k > 0$，$k = 1,\cdots,n$，q_k 由下式定义：

$$\prod_{k=1}^{n}(1-a_kx)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}q_kx^k,$$

则除了所有 a_k 相等以外,都有

(1) $q_k^2 < q_{k-1}q_{k+1}$; (2) $q_1 < q_2^{1/2} < q_3^{1/3} < \cdots$.

68. **序列 $\{a_n\}$ 的上下极限不等式**:$\{a_n\}$ 的上下极限分别定义为

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\geqslant 1}(\sup_{k\geqslant n}\{a_k\}), \liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geqslant 1}(\inf_{k\geqslant n}\{a_k\}).$$

则:(1) $\inf_n\{a_n\} \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup_n\{a_n\}$.

(2) $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$.

(3) **Cauchy 不等式**: 设 $a_n > 0$,则

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

(4) 若 $p_n > 0, p_1 \geqslant p_2 \geqslant p_3 \geqslant \cdots, \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \infty, \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k p_k < \infty$,其中 ε_n 只取 -1, 1 的值,则

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right) \leqslant 0 \leqslant \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\right).$$

证明见[56]P.33.

(5) Cauchy 不等式中 $a_n > 0$ 可推广为复数列 $\{z_n\}$ 的模,即

$$\liminf_{n\to\infty} |z_{n+1}/z_n| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} |z_{n+1}/z_n|.$$

提示:利用 $\left|\frac{z_2}{z_1}\cdot\frac{z_3}{z_2}\cdots\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{z_{n+1}}{z_1}\right|$,得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\log|z_{n+1}|\right) - \frac{1}{n}\log|z_1|.$$

令 $m = \lim_{k\to\infty}\inf|z_{k+1}/z_k|$,对于任给 $\delta > 0$,$\{\log|z_{k+1}/z_k|\}$ 中只有有限项小于 $\log m - \delta$. 同理,若令 $M = \lim_{n\to\infty}\inf\sqrt[n]{|z_n|}$,则对任给 $\varepsilon > 0$,$\{(1/n)\log|z_n|\}$ 中有无限多项不大于 $\log M + \varepsilon$. 于是对充分大的 n,有

$$(\log m) - \delta < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log|z_{k+1}/z_k| < \frac{n+1}{n}(\log M + \varepsilon) - \frac{1}{n}\log|z_1|,$$

由 δ, ε 的任意性,令 $n \to \infty$,得 $\log m \leqslant \log M$,即 $m \leqslant M$.

(6) **Stolz 不等式**:设 $\{b_n\}$ 严格递增到 ∞,$b_n > 0$,则对任意实数列 $\{a_n\}$,都有

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

当 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ 存在(有限或 $\pm\infty$)时,即得著名的 **Stolz 定理**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

(7) 对任意实数列 $\{a_n\}$,有

$$\liminf_{n\to\infty}\{a_{n+1} - a_n\} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant\leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n).$$

(8) 设 $\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$,则

$$\liminf_{n\to\infty}a_n\leqslant\liminf_{n\to\infty}\sigma_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}\sigma_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}a_n.$$

(9) **Toeplitz 不等式**:设给定双向无穷的实数矩阵

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \cdots\cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \cdots\cdots & & & & \end{pmatrix}$$

满足① 对所有 $m\in N,\sum_{n=1}^{\infty}|a_{mm}|\leqslant A$; ② $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_{mm}=1$;

③ 对所有 $n,\lim_{m\to\infty}a_{mn}=0$.

则对于给定的数列 $\{S_n\}$,若 $\lim_{n\to\infty}\inf S_n=\underline{S},\lim_{n\to\infty}\sup S_n=\overline{S}$ 均为有限,令 $\sigma_m=\sum_{n=1}^{\infty}a_{mn}S_n$,则

$$\frac{1}{2}(\overline{S}+\underline{S})-\frac{A}{2}(\overline{S}-\underline{S})\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\sigma_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\sup\sigma_n\leqslant\frac{1}{2}(\overline{S}+\underline{S})+\frac{A}{2}(\overline{S}-\underline{S}).$$

69. [MCU]. 设 $\{a_n\}$ 是正实数序列,则

$$\limsup_{n\to\infty}n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1.$$ 式中下界是最佳的.

证 用反证法,若存在某个 k,使得 $\forall n\geqslant k$,有

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\leqslant 1,\tag{1.5}$$

即 $\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{1}{n+1}+\frac{a_{n+1}}{n+1}$,于是,对任意自然数 p,有

$$\frac{a_k}{k}\geqslant\frac{1}{k+1}+\frac{a_{k+1}}{k+1}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots\frac{1}{k+p}+\frac{a_{k+p}}{k+p},$$

但由调和级数的发散性即知不等式(1.5)不能成立. 因此,对任一自然数 k,必存在某个 $n\geqslant k$,使得

$$n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)>1.\text{即}\quad\lim_{n\to\infty}\sup n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)\geqslant 1.$$

为了证明下界 1 是最好的,我们只要取 $a_n=n\ln n$,则对于 $n\geqslant 2$,有 $n\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\frac{1}{\ln n}\left[1+n\ln\frac{n+1}{n}+\ln(n+1)\right]<\frac{1}{\ln n}[2+\ln(n+1)]\to 1$ ($n\to\infty$). 另一方面,若取 $a_n=n^{1+\varepsilon}$, ($\varepsilon>0$),则用二项式级数展开式即可证得

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}-1\right)=1+\varepsilon.$$

70. [MCU]. 设所有 $a_n>0$,则

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n\geqslant e.\tag{1.6}$$

证 利用 $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$,可将(1.6)式变成

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}\right)^n \geqslant 1. \tag{1.7}$$

用反证法,设(1.7)式不成立,即存在 n_0,使所有 $n \geqslant n_0$,有 $\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n} < 1$.从而对所有 $n \geqslant n_0$,有 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} < -\frac{a_1}{n+1}$.

令 $n = n_0, n_0+1, \cdots$,然后相加得

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n_0}}{n_0} < (-a_1)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right).$$

令 $n\to\infty$,得 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = -\infty$.但这与所有 $a_n > 0$ 的假设相矛盾

用同样的方法,利用 $e^p = \lim_{n\to\infty}(1+p/n)^n$ 可将(1.6)式推广为:

设所有 $a_n > 0, p > 0$,则

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+p}}{a_n}\right)^n \geqslant e^p. \tag{1.8}$$

(1.3)和(1.8)式中的下界均不能再改进.见[305]1949,56(7):451.

71. **Pachpatte 不等式**:$y(n), f(n), g(n)$ 为非负实数列,$c_1, c_2 > 0$,若 $\forall n \in N$, $y(n) \leqslant [c_1 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)y(k)][c_2 + \sum_{k=0}^{n-1} g(k)y(k)]$.而且 $c_1c_2\sum_{k=0}^{n-1}a_kb_k < 1$.式中

$$a_n = g(n)\sum_{k=0}^{n-1}f(k) + f(n)\sum_{k=0}^{n-1}g(k), \quad b_n = \prod_{k=0}^{n-1}[1 + c_1g(k) + c_2f(k)].$$

则 $y(n) \leqslant \dfrac{c_1c_2b_n}{1 - c_1c_2\sum_{k=0}^{n-1}a_kb_k}$.(见[301]1995,195(3):638 - 644.)

72. [MCM].设实系数多项式 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_x x^{n-k}$ 的根全为正根,且 $a_0 > 0$,则

$$2^n[(-1)^n a_0 a_n]^{1/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant a_0\left(1 - \frac{a_1}{na_0}\right)^n.$$

(33届 IMO 中国集训队试题,证明见中等数学 1993.1:13)

注 Copson 不等式及其推广见[320]1988,39(156):385 - 400.级数形式见本章§2N36(3)和 N37(2).

§2 级数不等式

1. [MCU]. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n^{1/p}} < p, (p > 1)$.

提示:利用 $\frac{1}{(n+1)n^{1/p}} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{n}{n^{1/p}}$.

2. 设 $1/p + 1/q = 1, 1 < p < \infty$,则