§ 3　指数与对数函数不等式

1.　设 $x \neq 0$,则 $e^x > 1 + x$.

一般地,当 n 为奇数时,对于所有 $x \neq 0$ 成立不等式.

$$e^x > 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

当 n 为偶数时,此式仅对于 $x > 0$ 成立,而当 $x < 0$ 时,不等号反向,可由此证明方程 $\sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} = 0$ 没有实根.

2.　设 $0 < x \leqslant 1$,则　$e^x > (1 - (x/2))^{-1} > (2 - x)^{-1}$.

3.　若 $x < 1, x \neq 0$,则

(1)　$e^x < (1 - x)^{-1}$;

(2)　$x < e^x - 1 < x/(1 - x)$.

4.　设 $0 < x \leqslant 1.5936$ 则　$e^{-x} < 1 - (x/2)$.

5.　设 $x > 0$,则　$\frac{1 - x}{1 + x} < e^{-2x}$.

6.　利用连分式理论,容易求出:

$$f_1(x) = \frac{2 + x}{2 - x},\quad f_2(x) = \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2},$$

$$f_3(x) = \frac{120 + 60x + 12x^2 + x^3}{120 - 60x + 12x^2 - x^3}, f_4(x) = \frac{1680 + 840x + 180x^2 + 20x^3 + x^4}{1680 - 840x + 180x^2 - 20x^3 + x^4}, \cdots$$

都是 e^x 的越来越精确的有理逼近式.

7.　$| e^x - 1 | \leqslant | x | e^{|x|}, x \in R^1$.

8.　令 $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(x^k/k!),x\geqslant 0$,则

(1)　**Sewell 不等式**:$0\leqslant e^x-S_n(x)\leqslant(x/n)e^x$.

(2)　$0\leqslant e^x-(1+x/n)^n\leqslant(x^2/n)e^x,(|x|\leqslant n)$.

(3)　$|(1+\frac{x}{n})^n-S_n(x)|\leqslant\frac{x(1+x)}{n}e^x,(0\leqslant x\leqslant n)$.

(4)　若 $0<x\leqslant c$,则

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\leqslant e^x-S_n(x)\leqslant e^c\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

特别,当 $x=1$ 时,有

$$\frac{1}{(n+1)!}\leqslant e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{3}{(n+1)!}$$

注　左边不等式对于所有正数 x 成立,而当 $0<x<n+1$ 时,右边不等式可改进为

$$e^x-S_n(x)<\frac{x^{n+1}}{(n-x+1)n!}.$$

特别,当 $n=1$ 时,有 $e^x<\frac{2+x}{2-x}\ (0\leqslant x<2)$,而当 $n=2$ 时,有

$$1+x+\frac{x^2}{2}\leqslant e^x\leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2(3-x)}\ (0\leqslant x<3).$$

(5)　若 $0\leqslant x<\infty,\alpha_n\to 0(n\to\infty)$,则

$$\left|e^{-x}-\frac{1}{S_n(x)}\right|\leqslant\frac{1+\alpha_n}{\sqrt{2n\pi\cdot 2^n}}(1-e^{-x}).$$

(6)　**祁锋不等式**:设 $0\leqslant x\leqslant c$,则

$$\frac{[(n+1)!\alpha_n-e^c](c-x)x^{n+1}}{c(n+1)(n+1)!}\leqslant e^x-S_n(x)-\alpha_n x^{n+1}\leqslant 0.$$

式中 α_n 由递减公式决定:$\alpha_{-1}=e^c,\alpha_n=\frac{\alpha_{n-1}-1/n!}{c},n\geqslant 0$.　见[331]1997.8:16-23.

(7)　令 $f_n(x)=e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$,

$g_{n,k}(x)=\Gamma(n-k+2)\Gamma(n+k+2)f_{n-k}(x)f_{n+k}(x)-[\Gamma(n+2)f_n(x)]^2$,
$x>0$,则当 $n\geqslant k>0$ 时 $0<g_{n,k}(x)<g_{n,(k+1)}(x)$;当 $n>k\geqslant 0$ 时,

$$g_{n,(k+1)}(x)<\frac{1}{2}[g_{n,k}(x)+g_{n,(k+2)}(x)];$$

当 $n\geqslant k-1\geqslant 0$ 时,$[g_{(n+1),k}(x)]^2<g_{n,k}(x)g_{(n+2),k}(x)$.

证明上述不等式的基本工具是 $f_n(x)$ 的积分表示:

$f_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}[1+x\int_0^1 t^{n+1}e^{x(1-t)}\mathrm{d}t]$.(见 Alzer. H. 等,[301]1993,179(2):500-506)

(8)　设 $x\geqslant 0,0\leqslant p\leqslant 1$,则

$$\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!}-\frac{x^{p+2n}}{\Gamma(p+2n+1)}\leqslant e^{-x}\leqslant\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{(-x)^k}{k!}+\frac{x^{p+2n+1}}{\Gamma(p+2n+1)}.$$

式中 $\Gamma(p+n)$ 为 Gamma 函数,特别地,当 $p=0$ 时,得到

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-x)^k}{k!}\leqslant e^{-x}\leqslant\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-x)^k}{k!}.$$（见[305]1980,87:290－292）

(9)　令 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$，　$Q_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\{\max_{0\leqslant x<\infty}|e^{-x}-[P_n(x)]^{-1}|\}^{1/n}=1/2;\quad \lim_{n\to\infty}\{n\max_{0\leqslant x<\infty}|e^{-x}-[Q_n(x)]^{-1}|\}=2/e^2.$$

（张宝林,[345]1983,7:26－28）

9.　设　$P_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(2n-k)!\binom{n}{k}x^k.$

x_n 是 $P_n(-x)$ 的最小正零点，则 e^x 的有理逼近为：

$$\frac{P_{2k}(x)}{P_{2k}(-x)}\leqslant e^x\leqslant\frac{P_{2k+1}(x)}{P_{2k+1}(-x)},(0\leqslant x<x_n).$$

10.　[MCU]. $(1+\frac{x}{n})^{n+\alpha(x)}\leqslant e^x\leqslant(1+\frac{x}{n})^{n+\beta(x)}$，$0<x\leqslant 2$，式中 $\alpha(x)$ 的最大值为 $\alpha_0(x)=\frac{x}{\ln(1+x)}-1$，$\beta(x)$ 的最小值为 $\beta_0(x)=x/2$.

11.　当 $0<x<n$ 时，有

$$(1+\frac{x}{n})^n<e^x<(1-\frac{x}{n})^{-n}.$$

由此易求得　$2.5<e<2.99$.

注　当 $x>0$ 时，$a_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n$ 递增，而 $x>2$，$n\geqslant\frac{x}{x-2}+1$ 时，$b_n(x)=(1+\frac{x}{n})^{n+1}$ 递增，而 $0<x\leqslant 2$ 时，$b_n(x)$ 递减.

提示：考虑 $g(t)=(1+\frac{x}{t})^t$ 和 $h(t)=(1+\frac{x}{t})^{t+1}$ 的导数.

12.　(1)　对于所有实数 x，成立

$$e^x(1+\frac{x}{n})^{-x}\leqslant(1+\frac{x}{n})^n\leqslant e^x.$$

特别，取 $x=1$，得 $e(1+1/n)^{-1}<(1+1/n)^n<e<(1+1/n)^{n+1}$.

由此也可以证明

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x.$$

提示：考虑函数 $f_n(t)=t\ln(\frac{ne}{xt})$，当 $xt>0$ 时的极值，见[305]1986,93(8):634－640 和 1989,96(4):354.

(2)　设 $x,a>0$，令 $f(x)=[a(x+a)]^{1/2}$，$g(x)=[a(x+a)+\frac{1}{4}x^2]^{1/2}$，则

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^{f(x)}<e^x<\left(1+\frac{x}{a}\right)^{g(x)}.$$

13.　(1)　设 $x>0$，令 $f(x)=\frac{1}{12x^2+12x+3}+1$，$g(x)=\frac{1}{12x(x+1)}+1$，则

$$e^{f(x)}<(1+\frac{1}{x})^{x+\frac{1}{2}}<e^{g(x)}.$$

(Sandor, J., Debnath, L. [301]2000, 249(2): 569 - 582)

(2) $x>0$ 时,$e(1-\frac{1}{2x+1})<(1+\frac{1}{x})^x<e(1-\frac{1}{2(x+1)})$.

证 令 $g(x)=\frac{2(x+1)}{2(x+1)-1}(1+\frac{1}{x})^x$,证明 $g'(x)>0$.

(杨必成:[301]1999, 234: 717 - 722).

14. 设 $x>0$,则

$$(1+\frac{1}{x})^x=e(1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(1+x)^k}).$$

式中 $b_1=\frac{1}{2}, b_{n+1}=\frac{1}{n+1}(\frac{1}{n+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{n+2-k}), n=1,2,\cdots$.

证 令 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x, y=\frac{1}{1+x}$.

则 $f(x)=(1-y)^{1-\frac{1}{y}}$,令 $g(y)=\begin{cases}(1-y)^{1-\frac{1}{y}} & 0<y<1,\\ e, & y=0.\end{cases}$

$\varphi(y)=\ln g(y)=(1-\frac{1}{y})\ln(1-y)$. 由 Taylor 公式:$\ln(1-y)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}y^k$.

于是 $\varphi'(y)=\frac{1}{y^2}\ln(1-y)+\frac{1}{y}=-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}y^{k-2}$,

$$\varphi^{(m)}(y)=-\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{(k-2)(k-3)\cdots(k-m)}{k}y^{k-(m+1)}, m=2,3,\cdots,$$

$\varphi^{(m)}(0)=\lim_{y\to0}\varphi^{(m)}(y)=-\frac{(m-1)!}{m+1}$. 从 $\varphi(y)=\ln g(y)$,

$g'(y)=g(y)\varphi'(y), g^{(m+1)}=(g\varphi')^{(m)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}g^{(k)}\varphi^{(m+1-k)}$.

由 Taylor 公式:$g(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}y^k$. 另一方面,

$$g(y)=(1+\frac{1}{x})^x=e(1-\sum_{k=1}^{\infty}b_ky^k)=e+\sum_{k=1}^{\infty}(-eb_k)y^k,$$

比较以上两式,得 $g(0)=b_0=e, b_k=-\frac{g^{(k)}(0)}{k!e}$. 于是 $-(n+1)!eb_{n+1}=g^{(n+1)}(0)$ $=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(0)\varphi^{(n+1-k)}(0)$. 由此即得所需的结果.

推论 $x>0$ 时

$$(1+\frac{1}{x})^x<e[1-\frac{1}{2(1+x)}-\frac{1}{24(1+x)^2}-\frac{1}{48(1+x)^3}].$$

15. 当 $x>0$ 时,$f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 严格递增,而 $g(x)=(1+\frac{1}{x})^{x+1}$ 严格递减,并且

$$f(x)<e<g(x).$$

16. [MCU]. 对任意实数 x, a,有 $(1-x+a)e^x\leqslant e^a$.

提示：令 $f(x)=(1-x+a)e^x$，$f'(a)=0$，$f''(a)<0$。见[66]P.301－302.

17. 对于任意实数 x，有：(1) $|e^x-1-x|\leqslant(x^2/2)e^{|x|}$.

(2) $|e^x(x^2-6x+12)-(x^2+6x+12)|\leqslant(1/60)|x|^5e^{|x|}$.

18. 设 $a>0,x>0$，则

$$e^x\geqslant\left(\frac{ex}{a}\right)^a.$$

特别，取 $a=1$，得 $e^x\geqslant e\cdot x$，仅当 $x=1$ 时等号成立.

19. 设 $x>0$，则 $x^e\leqslant e^x\leqslant e\cdot x^x$

左边不等式仅当 $x=e$ 时等号成立，右边不等式仅当 $x=1$ 时等号成立.

20. 设 $0<x<e$，则 $(e-x)^{e+x}<(e+x)^{e-x}$.

21. 设 x,y 为正数，则

$$\exp\left(\frac{xy}{x+y}\right)<\left(1+\frac{x}{y}\right)^y<e^x.$$

特别，当 $y=1$，有 $\exp\left(\frac{x}{1+x}\right)<1+x$，注意此不等式对于 $x>-1,x\neq0$ 仍成立.

22. $\exp\left(\frac{-x}{1-x}\right)<1-x,(x<1,x\neq0)$.

23. 设 $p,q>0,1/p+1/q=1$，则

$$\frac{1}{p}e^{px}+\frac{1}{q}e^{-qx}\leqslant e^{\frac{(pqx)^2}{8}}.(x\in R^1).$$

提示：令 $f(x)=\ln(\frac{1}{p}e^{px}+\frac{1}{q}e^{-qx})-\frac{(pqx)^2}{8}$.

只要证明，当 $x\geqslant0$ 时，二阶导数 $f''(x)\leqslant0$，从而推出 $f'(x)\leqslant0$.

24. 设 $0<p<1,p+q=1,x,y>1$，则 $(1-p^x)^y+(1-q^y)^x>1$.

25. $e^{-k}\left(\frac{k^k}{k!}\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}$.

26. [MCU]. $x>-1,x\neq0$ 时，有 $e^x>1+\ln(1+x)$，

而当 $x>0$ 时，有 $e^x>1+(1+x)\ln(1+x)$.

27. [MCU]. 对于所有实数 x，

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\leqslant e^{cx^2}\tag{3.1}$$

成立的充要条件是 $c\geqslant1/2$.

证 设(3.1)式成立，则利用指数函数的幂级数展开式，有

$0\leqslant e^{cx^2}-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\sum_{n=1}^{\infty}(c^n-\frac{1}{2^n})\frac{x^{2n}}{n!}$. 由此可推出 $c\geqslant\frac{1}{2}$.

反之，若 $c\geqslant1/2$，则

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!}=\exp(x^2/2)\leqslant\exp(cx^2).$$

见[305]1981,88(8):605－612.

28. 设 $x>0$，则

$$\frac{3x}{e^{3x}-1}\leqslant\frac{1+e^x}{e^{3x}+e^x}.$$

29. 设 $x\neq y$,则

(1) [MCU]. $\exp\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{e^x-e^y}{x-y}<\frac{1}{2}(e^x+e^y)$.

提示:利用第七章 §1 的 Hadamard 不等式.

(2) 设 $0<x<y<1$, $f(x)=[e^{-x}-x\exp(-1/x)]/(1-x)$,则

$$1<f(x)<f(y)<3/e.$$

(Mond,B.等,[404].(5)2000,1(1):57-58).

30. **Toader 不等式:**

$$\frac{x+y}{2}<\frac{(x-1)e^x-(y-1)e^y}{e^x-e^y}.$$

式中 x,y 是不相等的实数.

31. $2/e<a^{\frac{a}{1-a}}+a^{\frac{1}{1-a}}<1,(0<a<1)$.

证 令 $f(x)=(1+x)x^{\frac{x}{1-x}},0<x<1$,用取对数法证明 $f'(x)<0$,从而 $2/e=\lim\limits_{x\to1-0}f(x)<f(x)<\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1$.

32. 设 $a>e^{1/e}$,则 $a^x>x,(a>0,a\neq1)$.

33. 设 $a\geqslant2,x>0$,则 $a^x+a^{\frac{1}{x}}\leqslant a^{x+\frac{1}{x}}$,

仅当 $a=2$ 及 $x=1$ 时等号成立.

证 令 $f(x,a)=(a^x+a^{1/x})a^{-(x+1/x)}$.注意到 $f(x,a)=f(1/x,a)$,因此,只要证 $x\geqslant1$ 时,$f(x,a)\leqslant1$.再注意到对于每个 x,$f(x,a)$ 是 a 的严格递减函数,从而只要证对于 $x>1$,有 $f(x,2)<1$.为此,只要证 $x>1$ 时,$F(x)=2^xf(x,2)-2^x<0$,由 $F'(x)=2^{x-\frac{1}{x}}(\ln2)g(1/x)$,只要证 $x>1$ 时,$g(1/x)<0$,问题归结为证 $0<t<1$ 时,$g(t)$ 是严格的凸函数,而这可由 $g''(t)>0$ 得证.

34. 设 $x\geqslant1$,$[x]$ 是不超过 x 的最大整数,则

$$\left(1+\frac{x}{[x]}\right)^{[x]}\leqslant2^x\leqslant\left(1+\frac{x}{[x+1]}\right)^{[x+1]}.$$

提示;用 Bernoulli 不等式.

35. 设 $x>1,a\geqslant1/3$,则

$$a\sqrt{x}+(1-a)\left(\frac{x+1}{2}\right)<e^{-1}x^{\frac{x}{x-1}}.\text{(见[305]1993,100(2))}$$

36. 令 $f(x)=e^{-x}-\left(1-\frac{x}{a}\right)^a$,

(1) 若 $a\geqslant1$, $|x|\leqslant a$,则

$$0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x^2e^{-x}}{a}.\text{特别},0\leqslant e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\leqslant\frac{x^2}{n}e^{-x}.$$

(2) 若 $0\leqslant x\leqslant a,a\geqslant2$,则

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^2(1+x)e^{-x}}{2a}.$$

(3) 若 $0 \leqslant x \leqslant a, a > 0$,则

$$0 \leqslant f(x) \leqslant x^2/(2a).$$

37. (1)**Hardy 不等式**,设 x, y 均为正数,则

$$\frac{1-e^{-x-y}}{(x+y)(1-e^{-x})(1-e^{-y})} - \frac{1}{xy} \leqslant \frac{1}{12}.$$

提示:令 $f(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{x}{12}$,则所证不等式等价于 $f(x) + f(y) \leqslant 1$. 注意到 $f(x) \leqslant 1/2$,即可得证. 见[317]1936,11:167 - 170.

(2) 设 $0 < x < 1$,则存在正数 c,使得

$$\frac{1}{x^2} - c < \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}.$$

提示:利用

$$e^{x/2} - e^{-x/2} = x + \frac{2}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{2}{5!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \cdots. \text{(见[76]P217)}$$

我们问:c 的最佳值是多少?

(3) [MCU]. 设 $0 < x < 1$,则

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}.$$

38. [MCU]. **Young 不等式**

$$xy \leqslant \begin{cases} e^{x-1} + y\ln y, & x \in R^1, y > 0 \\ e^y + x\ln x - x, & x \geqslant 1, y \geqslant 0, \\ e^y + x\ln(1+x) - 1, & x \geqslant 0, y \geqslant 0, \end{cases}$$

注 由第 3 章 N.27. Young 不等式的积分形式:$ab \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\mathrm{d}x$. 令 $f(x) = \ln(1+x), a = x-1, b = y$ 即可得出 $xy \leqslant e^y + x\ln x - x, (x \geqslant 1, y \geqslant 0)$. 仅当 $y = \ln x$ 时等号成立. 从 Young 不等还可推出:

(1) 设 $x, y \geqslant 0, p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, a, b > 0$,且 $(pa)^q(qb)^p \geqslant 1$,则

$$xy \leqslant ax^p + by^q;$$

(2) 设 $x, y > 0$,则

$$2xy \leqslant e^{x-1} + e^{y-1} + x\ln x + y\ln y.$$

39. 设 $a > 1, x > 0$,则

$$-\ln[1-(1-e^{-x})^a] < x^a.$$

证 令 $y = 1 - e^{-x}$,则 $0 < y < 1$. $-\ln[1-(1-e^{-x})^a] = -\ln(1-y^a)$ $< y^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{na}}{n+1} < y^a\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n+1}\right)^a = [-\ln(1-y)]^a = x^a$.

40. 设 $x > -1, x \neq 0$,则

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

注意这个不等式的几种常用变形:

(1) 将 $1+x$ 换成 x,得到

$$1-(1/x) < \ln x < x-1, (x>0, x\neq 1);$$

(2) 将 x 换成 $-x$,得到 当 $x<1, x\neq 0$ 时,

$$x < -\ln(1-x) < \frac{x}{1-x}; \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln(1-x)} < 1.$$

41. 设 $x>0$,则

$$x-(x^2/2) < \ln(1+x) < x.$$

上式可改进为

$$\frac{2x}{2+x} < \ln(1+x) < \frac{x}{\sqrt{1+x}}. \tag{3.2}$$

(3.2) 式等价于下式:

$$\frac{2}{2x+1} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}. \tag{3.3}$$

上式还可改进为

$$\frac{2}{2x+1} < \ln(1+\frac{1}{x}) < \frac{2}{2x+1}(1+\frac{1}{12x}-\frac{1}{12(x+1)}).$$

提示:利用 Taylor 展开式:

$\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^{2k-1}}{2k-1}, (|y|<1)$. 令 $y=\frac{1}{2x+1}, g(x)=(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x}) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2x+1)^{2k}} \leqslant \frac{1}{3(2x+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2x+1)^{2(k-1)}} = \frac{1}{12}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1})$.

42. (1) **$\ln(1+x)$ 的多项式逼近**:设 $0\leqslant x\leqslant 1$,则

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{5} a_k x^k + R_5(x)$. 式中 $|R_5(x)| \leqslant 1\times 10^{-5}$.

$a_1 = 0.99949556, a_2 = -0.49190896, \quad a_3 = 0.28947478, a_4 = -0.13606275, \quad a_5 = 0.03215845$. 进一步的结果见[101]P68 – 69.

(2) $\ln(1+\frac{1}{x})$ 的多项式逼近:设 $x>0$,则

$$\ln(1+\frac{1}{x}) = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2k+1} + R_n(x).$$

式中

$$\frac{2}{(2n+3)}\cdot\frac{1}{(2x+1)^{2n+3}} < R_n(x) < \frac{2}{(2n+3)}\cdot\frac{1}{(2x+1)^{2n+1}[(2x+1)^2-1]}.$$

(曹家鼎,[384]1992,4:106 – 108)

43. 设 $0<x<1$,则

$$0 < \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} < \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

44. 设 $0<x<1$,则

$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}+R_n(x)$. 式中$\frac{x^{2n+1}}{2n+1}<R_n(x)<(\frac{2-x}{1-x})\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
特别, $x=1/3, n=2$, 得 $0.6921<\ln 2<0.6935$.

45.　设 $x>1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+(k+1)(x-1)}<\frac{\ln x}{x-1}<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k(x-1)}.$$

46.　设 $0<x\leqslant 0.5828$, 则　$|\ln(1-x)|<3x/2$. (见[101]P68)

47.　设 $|x|\leqslant 1/2$, 则 $-x(x+1)<\ln(1-x)<x(x-1)$.

48.　设 $x>0, x\neq e$, 则$\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{e}$.

49.　设 $x>0, x\neq 1, p>0$, 则

$$1-\frac{1}{x}<2(1-\frac{1}{\sqrt{x}})<\ln x<p(x^{1/p}-1).$$

当 $x>1$ 时, 下界可改进为　$\ln x>\frac{2(x-1)}{1+x}$.

50.　设 $p>0$, 则当 x 充分大时, (1)　$\ln x<x^p$; (2)　$\ln x<\frac{x-3}{8}$.

51.　设 $x>1, T=\{a_0=1<a_1<\cdots<a_n=x\}$ 是$[1,x]$的任一分划, 则
$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k-1}}{a_k}<\ln x<\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k-1}}{a_{k-1}}$; 特别地$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\ln n<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

52.　设 $x>0, x\neq 1$, 则

$$0\leqslant\frac{x\ln x}{x^2-1}\leqslant\frac{1}{2}.$$

53.　[MCU]. 设 $x>0, x\neq 1$, 则

(1)　$\frac{\ln x}{x-1}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$.　(2)　$\frac{2}{x+1}\leqslant\frac{\ln x}{x-1}\leqslant\frac{x+1}{2x}$

54.　**Karamata 不等式**: 设 $x>0, x\neq 1$, 则

$$\frac{\ln x}{x-1}\leqslant\frac{1+\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}.$$

证　令 $x=\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^3, 0<|t|<1$. 并利用 $\ln\frac{1+t}{1-t}$ 的 Taylor 级数展开式(见 N. 44.), 则所证不等式变成下述显然成立的不等式:

$$3\sum_{k=0}^{\infty}(1-\frac{1}{4k+1})t^{4k}+\sum_{k=0}^{\infty}(1-\frac{3}{4k+3})t^{4k+2}\geqslant 0.$$

(见[4]P372 - 373, P.527 - 528)

注　令 $f(n)=1+\frac{1}{2}(\frac{e}{n})^n n!-\frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}$. 利用 Karamata 不等式证明 $\frac{1}{3}<f(n)<\frac{1}{2}$, 更确切地, 当 n 从 0 增到 ∞ 时, $f(n)$ 从$\frac{1}{2}$ 递减地趋于$\frac{1}{3}$.

55.　[MCU]. 设 $e<x<y$, 则

$$\frac{x}{y}<\frac{\ln x}{\ln y}<\frac{y}{x}.$$

提示:考虑 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$ 的单调性.

56. 设 $x>y>0$,则 $\sqrt{xy}<\frac{x-y}{\ln x-\ln y}<\frac{1}{2}(x+y)$.

注 设 $f(t)=\left(\frac{x^t-y^t}{t(\ln x-\ln y)}\right)^{1/t}$,则当 t 从 $0\uparrow\infty$ 时,$f(t)$ 从$\sqrt{xy}$ 严格递增到 $\max\{x,y\}$. 见[301]1994,183(1):155－156.

57. 设 x,y 为正数,则 $x\ln(x^2+y^2)\leqslant 2x\ln x+y$.

58. 设 x,y,a,b 均为正数,则

$x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}\geqslant(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}$, 仅当 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ 时,等号成立.

提示:考虑 $(x\ln x)''>0$.

特别,取 $a=b=1$,有 $x\ln x+y\ln y\geqslant(x+y)\ln\frac{x+y}{2}$.

59. 设 $a>1,b>c>0$,则

$$\log_a\left(\frac{c}{b}\right)<\log_a\left(\frac{1+c}{1+b}\right).$$

60. **不同底的对数的比较:**

(1) 设 $a>b>1$,则 $\log_a b<\log_b a$.

(2) 设 $0<a<1<b$,则当 $ab>1$ 时,$\log_a b<\log_b a$.

当 $0<ab<1$ 时,不等号反向;当 $ab=1$ 时,$\log_a b=\log_b a$.

(3) 设 $a>b>c>1$,则 $\log_a c<\log_a b<\log_c b$.

(4) $x>1$ 时,$f(x)=\frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ 严格递增,即 $\frac{\ln(x-1)}{\ln x}<\frac{\ln x}{\ln(x+1)}<1+\frac{1}{x}$.

由此推出:$\ln(n-1)\ln(n+1)<(\ln n)^2$; $\log_n(n+2)<[\log_n(n+1)]^2$.

(5) 若 $a>2$,则 $\log_a(a-1)\log_a(a+1)<1$.

61. 设 a,b,c,d 为正数,$a\neq c$.

(1) 设 $a>c>1$,若 $c>d,bc-ad\geqslant 0$,则 $\log_a b>\log_c d$;若 $c<d,bc-ad\leqslant 0$ 时,不等号反向;

(2) 设 $a>c>1,d\geqslant b>1$,则 $\log_a b<\log_c d$.

(3) 设 $a>b>0,c>0,a>1$,则

$\log_a b<\log_{(a+c)}(b+c)$ 特别地,$\log_{(n+1)}n>\log_n(n-1)$. 见[348]1989,4:25－26.

(4) 设 $b>a>1,c>0$,则 $\log_a b>\log_{(a+c)}(b+c)$.

62. 设 $x+a>0,x+b>1,x<y$,则当 $a>b$ 时

$$\log_{(x+b)}(x+a)>\log_{(y+b)}(y+a).$$

若 $a<b$,则不等号反向. 特别地,当 $1<x<y$ 时,成立:$\log_x(x+1)>\log_y(y+1)$.

63. **Lefort 不等式:**设 $a>1,p>0,0<x<1$,则

$0<\log_a(p+x)-\log_a p-x[\log_a(p+1)-\log_a p]<\frac{x(1-x)}{2p^2}\log_a e\leqslant\frac{\log_a e}{8p^2}$.

(转引[4]P.375)

64. 设 $x>0,n\geqslant 2$,则

$$(x+n-1)\ln(x+n-1)-x\ln x<n-1+\sum_{k=1}^{n-1}\ln(x+k)$$
$$<(x+n)\ln(x+n)-(x+1)\ln(x+1).$$ (证明见[4]P376 - 377)

65. 设 $x>0$,则 $0<(x+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x})-1<\frac{1}{12x(x+1)}$.

66. 设 $x,y\geqslant 0$,则 $\ln(e+x\times 2^y)\leqslant(x+1)(y+1)$.

67. 设 a,b 为任意实数,则

$$\log_2(2^a+2^b)\geqslant\frac{1}{2}(a+b)+1.$$

68. 利用记号

$$\log^+|z|=\begin{cases}\log|z|, & \text{若 } |z|\geqslant 1\\ 0, & \text{若 } 0<|z|<1,\end{cases}$$

则当 $a,b>0$ 时,有

$$\log^+(a+b)\leqslant\log 2+\log^+a+\log^+b,$$
$$\log^+\log^+(a+b)\leqslant\log 2+\log^+\log^+a+\log^+\log^+b,$$

而对任意两个复数 z_1,z_2,,有 $|\log^+|z_1|-\log^+|z_2||\leqslant\log 2+\log^+|z_1\pm z_2|$.

见[364]1984.4:301 - 312.

69. 设 $u>e$,则方程 $x\ln x=u$ 的根 $x(u)$ 满足

$$\frac{u}{\ln u}<x(u)\leqslant(1+e^{-1})\frac{u}{\ln u}.$$

70. 设 $a_k>1,1\leqslant k\leqslant n,a_{n+1}=a_1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\log_{a_k}a_{k+1}\geqslant n.$$

仅当所有 a_k 相等时等号成立.

71. **伪几何不等式**:设 x_k 为实数,$y_k\geqslant 0$,当 $y_k=0$ 时,$y_k\ln y_k$ 定义为 0,则

$$\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\leqslant\sum_{k=1}^{n}[e^{x_k}+y_k(\ln y_k-1)].$$

(Eugenia, D. Anal. Numer. Theor Approx. 1987, 16(2): 127 - 132)

72. $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2}))\geqslant\sqrt{1+x^2}$, $(x\in R^1)$.

73. 设 $1\leqslant x\leqslant y$,则 $x(1+y)\ln x\geqslant(x+y)(x-1)$.