§2 组合不等式

一、 二项式系数不等式

组合数$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$是二项展开式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{2.1}$$

各项的系数,所以也称为二项式系数,其中规定当 $k > n \geqslant 0$ 时$\binom{n}{k} = 0$,和$\binom{n}{0} = 1$.

1. **二项式系数的基本性质:**

(1) 对偶性:$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; (2.2)

(2) 递归性:$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$; (2.3)

(3) 正交性:

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k-m} \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \delta_{nm}; \tag{2.4}$$

式中 $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, n = m, \\ 0, n \neq m. \end{cases}$

(4)　单峰不等式：

①　若 n 为偶数，则

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\binom{n}{2}<\cdots<\binom{n}{n/2}>\binom{n}{\frac{n}{2}+1}>\binom{n}{\frac{n}{2}+2}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n};\tag{2.5}$$

②　若 n 为奇数，则

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{\frac{n+1}{2}}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}.\tag{2.6}$$

2.　若 $k<n$，则

$$n^{-2k}\binom{n+k}{n-k}\leqslant\frac{1}{k!}.\tag{2.7}$$

3.(1)　若 $k\leqslant n-2$，则 $\binom{n-1}{k-1}\leqslant\frac{n-1}{2}\binom{n-1}{k}$；　(2.8)

(2)　若 $k\leqslant n-4$，则 $\binom{n}{k}<(n-3)\binom{n-1}{k}$.　(2.9)

(3)　若 $k=2,\cdots,n-2,n\geqslant13$，令 $p=1-n+nk-k^2$，则　$n\binom{n}{k}<2^p$.

(4)　设 $1\leqslant m\leqslant k\leqslant n$，则

$$(n+1)\binom{n+1}{k-m}\leqslant\binom{n+1}{k-1}\binom{n+1}{m}.$$

4.　若 $m<n$，则

$$\binom{2n+m}{n}\binom{2n-m}{n}\leqslant\binom{2n}{n}^2.\tag{2.10}$$

5.　设 $m\geqslant n>2$，则

$$\frac{1}{n!}-\frac{1}{2m(n-2)!}<\binom{m}{n}m^{-n}<\frac{1}{n!}.\tag{2.11}$$

见[345]1940,47:157－159.

6.　$\binom{2n}{n}$ 的上下界有许多研究，例如：

(1)　利用 $\binom{2n}{n}=\frac{4^n(2n-1)!!}{(2n)!!}=4^nP_n$ 和(1.128)式(Wallis不等式，见本章§1N.25.)，可得

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n+(1/2))}}<4^{-n}\binom{2n}{n}<\frac{1}{\sqrt{\pi(n+(1/4))}}.\tag{2.12}$$

(2)　$2^n<\binom{2n}{n}<4^n\quad(n\geqslant2)$.

7.　$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}>n\cdot2^{(n-1)/2},(n>1)$.　(2.13)

提示:利用 AG 不等式和二项式定理:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^{n}. \tag{2.14}$$

8. $$\left\{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right\}^{2}\leqslant n\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{2}. \tag{2.15}$$

9. $$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{1/2}\leqslant\sqrt{n(2^{n}-1)}. \tag{2.16}$$

提示:利用(2.14)式和 Cauchy 不等式.

10. $$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{-1}\geqslant\frac{n^{2}}{2^{n}-1}. \tag{2.17}$$

11. [MCU] $$2+\frac{2}{n}<\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{-1}<2+\frac{2}{n}+(n-3)\binom{n}{2}^{-1}.\ n\geqslant 1. \tag{2.18}$$

见[66]P276 - 277.

12. $$\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{2}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{-1}\right)^{2}\leqslant n^{3}. \tag{2.19}$$

13. $$\frac{4^{n}}{\sqrt{\pi(n+(1/2))}}<\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}<\frac{4^{n}}{\sqrt{\pi(n+(1/4))}}. \tag{2.20}$$

提示:利用 Vandermonde 恒等式

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{m}{j}\binom{n}{k-j}=\binom{m+n}{k},k=0,1,2,\cdots,m+n. \tag{2.21}$$

特别地 $$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}=\binom{2n}{n}. \tag{2.22}$$

再利用(2.12)式即可得证.

14. [MCM]

$$\binom{n}{0}\binom{n}{1}+\binom{n}{1}\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{2}. \tag{2.22}$$

冷岗松用微微对偶不等式(见第 3 章 §1N.87.)给出了一个简捷的证明,见[350]1983,1:27 - 29.

15. 令 $f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{2k+1}\binom{n}{k}$,则

$$\frac{\sqrt{\pi(4n+5)}}{4(n+1)}<f(n)<\frac{\sqrt{\pi(2n+3)}}{2\sqrt{2}(n+1)}. \tag{2.23}$$

证 利用恒等式

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{1}{2k+1}\binom{n}{k}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \tag{2.24}$$

和(1.128)式即可得证.

16. 令 $g(n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k}$,则

$$1/2+\ln n<g(n)<1+\ln n. \tag{2.25}$$

提示:利用恒等式

$$g(n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \tag{2.26}$$

和(1.4)式即可得证,实际上,利用 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 的其他估计式,可得到 $g(n)$ 更为精确的估计.

17. 设 $S(n,m)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}2^k\binom{m+k}{k}$.则

(1) **Turan 不等式**:$S(n,m)\leqslant\left(\frac{2e(m+n)}{n}\right)^n$; (2.27)

(2) **Makai 不等式**:

$$2^{n-1}\binom{m+n-1}{n-1}<S(n,m)<2^n\binom{m+n-1}{n-1}. \tag{2.28}$$

见[391]1959,10:405 - 411.

18. **Grüss 不等式**:设 $n\geqslant 1,1\leqslant i,j,m\leqslant n$,则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k}{i}\binom{k}{j}\binom{k}{m}-\frac{1}{n^3}\binom{n+1}{i+1}\binom{n+1}{j+1}\binom{n+1}{m+1}\leqslant\frac{1}{8}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{n}{m}. \tag{2.29}$$

见[355]1983,35(1):59 - 64.

19. $\prod\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\leqslant\left(\frac{2^n-2}{n-1}\right)^{n-1},(n>2)$ (2.30)

证 利用 AG 不等式,有

$$\left\{\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right\}^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}=\frac{2^n-2}{n-1}.$$

20. 设自然数 $m_j<n_j,j=1,2,\cdots,k$,令 $a_k=\sum\limits_{j=1}^{k}n_j,b_k=\sum\limits_{j=1}^{k}m_j$,则

$$0<\prod_{j=1}^{k}\binom{n_j}{m_j}<\binom{a_k}{b_k}. \tag{2.31}$$

提示:比较展开式

$$(1+x)^{a_k}=\prod_{j=1}^{k}(1+x)^{n_j}=\prod_{j=1}^{k}\left[1+\binom{n_j}{1}x+\cdots+\binom{n_j}{m_j}x^{m_j}+\cdots+x^{n_j}\right]$$

中 x^{b_k} 的系数.Moor 对(2.31)式的推广见[4]P.266.

21. 设 $f(m,n)$ 满足 $f(1,n)=f(m,1)=1$.而且当 $m,n\geqslant 2$ 时,$f(m,n)\leqslant f(m,n-1)+f(m-1,n)$,则

$$f(m,n)\leqslant\binom{m+n-2}{m-1}. \tag{2.32}$$

提示:利用二重归纳法,易证命题 $P(m,1),P(1,n)$ 对任意自然数 m,n 成立,设 $P(k+1,j),P(k,j+1)$ 成立,即

$$f(k+1,j)\leqslant\binom{k+j-1}{k};f(k,j+1)\leqslant\binom{k+j-1}{k-1}.则$$

$$f(k+1,j+1)\leqslant f(k+1,j)+f(k,j+1)\leqslant\binom{k+j-1}{k}+\binom{k+j-1}{k-1}=\binom{k+j}{k}.$$

即命题 $P(k+1,j+1)$ 也成立,从而对任意 m,n,(2.32) 式成立.

二、 广义二项式系数不等式

若在(2.1) 式中的指数 n 换成实数 α,得到

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}y^{\alpha-k},\quad \left|\frac{x}{y}\right|<1, \tag{2.33}$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k},\qquad |x|<1, \tag{2.34}$$

式中

$$\binom{\alpha}{k}=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}, & k>0,\\ 1, & k=0,\\ 0, & k<0,\end{cases} \tag{2.35}$$

(k 为整数) 称为**广义二项式系数**,在证明有关不等式时,应注意以下恒等式:

(1) $\displaystyle\binom{\alpha}{k}=\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}$; (2.36)

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+k}{k}=\binom{\alpha+n+1}{n}$; (2.37)

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{\alpha}\binom{n-k}{\beta}=\binom{n+1}{\alpha+\beta+1}$; (2.38)

(4) $\displaystyle\binom{-\alpha}{k}=(-1)^{k}\binom{\alpha+k-1}{k}$,$\alpha\in R^{1},k\in Z$. (2.39)

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{\alpha}{k}=\binom{n-\alpha}{n}. \tag{2.40}$$

1. 从(2.35) 式,当 $\alpha\neq-1,-2,\cdots$ 时,

$$\binom{n+\alpha}{n}=\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+2)(\alpha+1)}{n!},\text{则}$$

(1) $\alpha>-1$ 时,$\displaystyle\binom{n+\alpha}{n}>0$;

(2) $\alpha>0$ 时,$\displaystyle\binom{n+\alpha}{n}$是 n 的递增函数;

(3) $-1<\alpha<0$ 时,$\displaystyle\binom{n+\alpha}{n}$是 n 的递减函数;

(4) $\displaystyle\binom{n+\alpha}{n}=\frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\approx\frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$.

式中 $\Gamma(\alpha+1)$ 是 Gamma 函数(定义见第 8 章 §3).

提示:考虑关系式

$$(1-x)^{-\alpha-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\alpha}{n}x^{n}.\text{见[57]Vol. 1. P77.}$$

2. (1) 若 $\alpha<0,k\in N$,则

$$(-1)^k\binom{\alpha}{n}>-\frac{\alpha}{k}>0;\tag{2.41}$$

(2) 若 $\alpha<-1$,则

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|\geqslant 1-(\alpha+1)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right);\tag{2.42}$$

(3) 若 $-1<\alpha<0$,则

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|<\frac{1}{1+(\alpha+1)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}.\tag{2.43}$$

(4) 若 $0<\alpha<1$,则,

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|<\frac{\alpha}{n}.\tag{2.44}$$

(5) 若 $\alpha>1,\alpha\neq m$,(即 α 不是整数),则

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|\leqslant\left|\binom{\alpha}{[\alpha]+1}\right|\left(\frac{[\alpha]+1}{n}\right).\tag{2.45}$$

(6) $\alpha>-1$ 时,存在非负整数 k_α 使得 $k_\alpha<\alpha+1\leqslant k_\alpha+1$,而且当 $n>k_\alpha$ 时

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right|\leqslant\binom{\alpha}{n}\left(\frac{k_\alpha}{n}\right)^{\alpha+1}.\tag{2.46}$$

(7) 若 $\alpha\leqslant-1$,则 $\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ 关于 n 递增;若 $\alpha>-1$,则 $\left|\binom{\alpha}{n}\right|$ 关于 n 递减并趋于 0.

3. 设 $S(\alpha,n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{\alpha k+1}\binom{n}{k},\alpha>0$,则

(1) $$\frac{2^{n+1}-1}{n+1}<S(\alpha,n)<\frac{2^{n+1}-1}{\alpha(n+1)},(0<\alpha<1,n\geqslant 1);\tag{2.47}$$

(2) $$\frac{2^n}{n}<S(\alpha,n)<\frac{2^{n+1}-1}{n+1},1<\alpha\leqslant 2,n\geqslant 3;\tag{2.48}$$

(3) $$\frac{2^{n+1}}{\alpha(n+1)}<S(\alpha,n)<\frac{2^n}{n-1},\alpha\geqslant 2,n\geqslant 2.\tag{2.49}$$

注 (2.48) 式右边不等式与(2.49) 式左边不等式对所有自然数 n 均成立.

(4) $\alpha>0$ 时,$S(\alpha,n)\geqslant S(\alpha,1)=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$. (2.50)

其中下界是最好的.证明见[355]1969,6(21):89 - 90.

4. 设 x,y,b 为实数,且 $y>n-1,b>n-1,x>n-2$.并设 $\binom{y}{n}=\binom{b}{n}+\binom{x}{n-1}$.则当 $b>x$ 时,成立

$$\binom{y}{n+1}>\binom{b}{n+1}+\binom{x}{n};$$

若 $b<x$,则上述不等式反向.见[305]1996,103(1):62 - 64.

5. **Leko 不等式:**设实数 x,y,z 满足 $x^n+y^n=z^n$,则

$$0<\binom{z}{n}-\binom{x}{n}-\binom{y}{n}<\binom{z-1}{n-1}.\ (见[4]P264) \tag{2.51}$$

6. **Lorentz-Zeller 不等式**：设 m,n 为非负整数，$\alpha\geqslant 0$，令 $p=\min\{m,n\}$，则

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{m-k+\alpha}{m-k}\binom{n-k+\alpha}{n-k}\binom{k-\alpha-2}{k}\geqslant 0. \tag{2.52}$$

见[360]1964,15:208 – 213.

7. 设 m,n,p 为非负整数，$m>n$，$0<\alpha<1$，$0\leqslant x\leqslant 1$，则

$$(-1)^{m-n-1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{\alpha+n}{k+m}x^k>0. \tag{2.53}$$

见[305]1990,97(7),E3309.

8. 设 $\alpha>0$，$n\geqslant 2$，令 $\beta=\dfrac{n(n+1)}{2\alpha}+n$，则

$$\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)^n<\binom{\beta}{n}<\frac{1}{n!}\left\{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)\right\}^n.\ (见[4]P262) \tag{2.54}$$

9. 设实数 $a>k$，$k\in N$，$b=\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$，则

$$\binom{a}{k}\leqslant\frac{a^a}{bk^k(a-k)^{a-k}}. \tag{2.55}$$

提示：用数学归纳法和 $b=\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$ 的单调性(Kalajdzic). (2.55) 式在信息论中有重要应用，它是下述 **Aslund 不等式**的推广：

$$\binom{n}{k}\leqslant\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}. \tag{2.56}$$

(见 Nord. Mat. Tidskr 1961, 9:105)

三、　多项式系数不等式

多项展开式为

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{n_1+\cdots+n_m=n}\binom{n}{n_1n_2\cdots n_m}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}, \tag{2.57}$$

式中 $n_1,\cdots,n_m$ 为非负整数.

$$\binom{n}{n_1n_2\cdots n_m}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} \tag{2.58}$$

称为多项式系数.

在(2.57) 式中取 $\forall x_k=1$，$1\leqslant k\leqslant m$，得到恒等式：

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\binom{n}{n_1n_2\cdots n_m}=m^n. \tag{2.59}$$

特别取 $m=2$，$n_1=k$，则 $n_2=n-k$，于是

$$\binom{n}{k(n-k)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

所以，可从有关 $\binom{n}{k}$ 的不等式用归纳法推出(2.58) 式的相应不等式，但有关结果比较少.

四、 高斯系数不等式

设 X 是有限域 $GF(q)$ 上的 n 维向量空间. X 的全部 k 维子空间的个数称为高斯系数. 记为 $\binom{n}{k}_q$. $(0 \leqslant k \leqslant n)$,它是以下乘积展开式的系数:

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^k x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}}x^k, \tag{2.60}$$

式中

$$\binom{n}{k}_q=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)},0<k\leqslant n.\binom{n}{0}_q=1. \tag{2.61}$$

易证 $\lim\limits_{q\to 1}\binom{n}{k}_q=\binom{n}{k}$,所以 $\binom{n}{k}_q$ 与 $\binom{n}{k}$ 有许多相似的性质,如:

(1) **对偶性:** $$\binom{n}{k}_q=\binom{n}{n-k}_q; \tag{2.62}$$

(2) **递归性:** $$\binom{n}{k}_q=\binom{n-1}{k-1}_q+q^k\binom{n-1}{k}_q; \tag{2.63}$$

(3) **正交性:** $$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}_q\binom{k}{m}_q q^{\binom{n-k}{2}}=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k-m}\binom{n}{k}_q\binom{k}{m}_q q^{\binom{k-m}{2}}=\delta_{n,m}; \tag{2.64}$$

(4) **单峰不等式:**

① 若 n 为偶数,则

$$\binom{n}{0}_q<\binom{n}{1}_q<\cdots<\binom{n}{n/2}_q>\left[\begin{matrix}n\\ \frac{n}{2}+1\end{matrix}\right]_q>\cdots>\binom{n}{n}_q; \tag{2.65}$$

② 若 n 为奇数,则

$$\binom{n}{0}_q<\binom{n}{1}_q<\cdots<\left[\begin{matrix}n\\ \frac{n-1}{2}\end{matrix}\right]_q=\left[\begin{matrix}n\\ \frac{n+1}{2}\end{matrix}\right]_q>\cdots>\binom{n}{n}_q. \tag{2.66}$$

利用以上性质,可以得到与 $\binom{n}{k}$ 类似的不等式.

五、 拉丁长方不等式

设 A 是 $m\times n$ 长方形矩阵, $m\leqslant n$, $S=\{a_1,\cdots,a_n\}$ 是 n 个元素构成的集合,若 A 中的每一行都是 S 中元素的一个无重复排列,而在 A 的每一列中,每个元素至多出现一次,则称 A 是在集合 S 上构造的一个拉丁长方,特别当 $m=n$ 时, A 称为 n 阶拉丁方,通常取 $S=\{1,2,\cdots,n\}$.

$m\times n$ 拉丁长方的个数 $L(m,n)$ 不等式:

$$L(m,n)\geqslant n!(n-1)!\cdots(n-m+1)!. \tag{2.67}$$

特别 $m=n$ 时, $L(n,n)$ 记为 L_n, 这时

$$L_n\geqslant n!(n-1)!\cdots 1!$$

若 n 阶拉丁方 A 的第一行和第一列的元素都是按自然顺序排列的，则称 A 是标准形式或约化的(reduced) 拉丁方，相应的个数记为 l_n.

$$l_n \geqslant (n-2)!(n-3)!\cdots 1!.$$

拉丁方在实验设计中有重要应用，还可考虑无穷拉丁方和多维情形的推广，见 Riordan, J, An introduction to combinatorial analysis, Wiley, 1967.

六、　分拆函数不等式

将自然数 n 分成为不计次序的若干自然数之和的一种表示法，即

$$n=\sum_{k=1}^{m} n_k,\quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_m > 0,$$

称为 n 的一种分拆(Partition)，对被加项和项数加上一些限制条件，就得到某种特殊类型的分拆，n 的某类型所有不同分拆个数，称为该类型的分拆函数，记为 $r(n)$，通常约定 $r(0)=0$ 或 1，不加限制条件的分拆函数记为 $p(n)$；将 n 分解成大于 1 的因子之积(不计因子的顺序) 的不同分解式的个数，称为乘法分拆函数，记为 $f(n)$，约定 $f(1)=1$.

1.　**无限制分拆函数 $p(n)$ 不等式：**

(1)　1918 年，Hardy 等证明存在两个正常数 c_1, c_2，使得

$$\frac{c_1}{n}\exp(2\sqrt{n}) < p(n) < \frac{c_2}{n}\exp(2\sqrt{2n}). \tag{2.68}$$

华罗庚用代数方法证明：

$$2^{[\sqrt{n}]} < p(n) < n^{3[\sqrt{n}]},\ (n>2). \tag{2.69}$$

(见[76]P215.)

1982 年李文汉用排列组合方法，将(2.69) 式右边不等式中的指数 $3[\sqrt{n}]$ 改进为 $2[\sqrt{n}]-(1/2)$. (见[345]1982,4:31－32). 用 Tauber 型方法，模函数论方法及解析数论方法等，可以得到 $p(n)$ 更好的估计，见[76] 等.

(2)　[MCM] $p(n+1)-2p(n)+p(n-1)\geqslant 0\quad (n>1)$.　(2.70)

(3)　**Andrew 不等式：** 设 $p_k(n)$ 表示将 n 分成至多 k 个部分的分拆数，则

$$p_k(n) \leqslant (n+1)^k;$$

$$p(n) \leqslant p(n-1)+p_k(n)+p(n-k). \tag{2.71}$$

2.　**乘法分拆函数 $f(n)$ 不等式：** 1983 年 Hughes 等证明

$$f(n) \leqslant 2n^{\sqrt{2}}.$$

并提出两个猜想：(1) $f(n)\leqslant n$；(2)　$n\neq 144$ 时，$f(n)\leqslant n/\ln n$.　(2.72)

见[305]1983,90:468－471.

陈小夏于 1987—1988 年先后证明了以上两个猜想. 见[334]1987,30:268－271. [333]1988,35(9). 杭州师院学报 1991,3:5－15, 1990 年汤正学改进了陈小夏的结论.

1992 年，许康华对于 $n>1$ 的标准分解：$n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，$m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_k>0$，证明

$$f(n) \leqslant \alpha^{m_1}\beta^{m_2}(\beta+1)^{m_3}\cdots(\beta+k-2)^{m_k}. \tag{2.73}$$

式中 $p_1,\cdots,p_k$ 是不同的素数，$\beta=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha-1}$，$\alpha$ 是满足条件 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\leqslant\alpha$ 的实数. 见[344]1992.2.1989 年，曹惠中给出了 $f(n)$ 的均值下界：当 x 充分大时

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)\geqslant\frac{1}{384}x(\ln x)^3+0(x(\ln x)^2).$$

见[340]1991，11(2)：183 - 187.

3. [MCM]. n 的分拆中不同的加数的个数，称为该分拆的离散度. 用 $q(n)$ 表示离散度之和，则

$$q(n)=1+\sum_{k=1}^{n-1}p(k)\leqslant\sqrt{2n}p(n). \tag{2.74}$$

证 设 n 的所有分拆中，离散度最大的为 m. 即 n 可化为 m 个不同自然数之和，于是

$$n\geqslant\sum_{k=1}^{m}k=\frac{1}{2}m(m+1).\text{从而 } m^2\leqslant 2n,q(n)\leqslant mp(n)<\sqrt{2n}p(n).$$

此外，可见专著：Andrew G.E.，The theory of partitions，Addison-Wesley，1976.

4. **Bell 数不等式**：设 B_n 表示集合 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 划分为不相交子集的并的不同方法的个数，则 B_n 称为第 n 个 Bell 数. 它的指数型母函数是 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n}{n!}x^n=\exp(e^x-1)$，它的递推式为 $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}B_k$，它还有表达式 $B_n=(1/e)\sum_{k=1}^{\infty}k^n/k!$. 1991 年田正平、杨炳良研究了 B_n 的性质和许多不等式，例如：

(1) $B_n\leqslant n!$；

(2) $2B_n\leqslant B_{n+1}<en!$，左边仅当 $n=1$ 时等号成立；

(3) $n\geqslant 3$ 时，$B_{n+1}\geqslant 3B_n$，仅当 $n=3$ 时等号成立；

(4) $n>5$ 时，$B_{n+1}>3B_n+2(n-2)B_{n-2}$；

(5) $n\geqslant 7$ 时，$B_n<e^2(n-2)!$；

(6) $n\geqslant 8$ 时，$B_{n+1}<(n-2)B_n$；由此推出 $B_n<e^3(n-3)!$.

(7) $B_n\leqslant e(n-1)!\sum_{k=0}^{n-2}\dfrac{1}{k!(n-1-k)}$，

见杭州师院学报 1991，3：5 - 15.

5. 在集$\{1,2,\cdots,n\}$上的置换 π 称为以 j 作为一个强固点，若 $k<j$ 时 $\pi(k)<j$，而 $k>j$ 时 $\pi(k)>j$. 设 $h(n)$ 是在$\{1,2,\cdots,n\}$上至少有一个强固定点的置换的数目，则对于 $n>1$，有

$$2(n-1)!-(n-2)!\leqslant h(n)\leqslant 2(n-1)!.$$ 见[305]1991，98：853.

七、 计数不等式

1. **Heilbron 不等式**：设平面上任给 n 个点 $P_1,\cdots,P_n$，每两点间的最大距离与最小距离之比记为 λ_n. $z_n=\inf\lambda_n$. 由于这类问题有一定的难度，而且 n 越大，z_n 就会越复杂. 因而多次出现在各类数学竞赛试题中，例如：

(1) $\lambda_4 \geqslant \sqrt{2}$ (1961 年匈牙利[MCM]);

(2) $\lambda_5 \geqslant 2\sin 54^\circ$ (1995,中国 MCM);

(3) $\lambda_6 \geqslant \sqrt{3}$ (1964 美国 Putnan;1985 - 1986 波兰); $\lambda_6 \geqslant 2\sin 72^\circ$(1986,中国).

(4) Heilbron 猜想:$\lambda_n \geqslant 2\sin\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\pi = 2\cos\frac{\pi}{n}$. (2.75)

1989 年吴报强利用凸包理论证明了上述猜想,而且得到了一个更好的结果:

若 n 个点中有三点共线,则 $\lambda_n \geqslant 2$;若任意三点均不共线,它们的凸包为 k 边形($3 \leqslant k \leqslant n$),则

$$\lambda_n \geqslant 2\sin\frac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi. \tag{2.76}$$

易证 $\sin\frac{kn-4k+4}{2k(n-2)}\pi \geqslant \sin\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\pi$.且仅当 $k = n$ 时等号成立,所以(2.76)式要优于(2.75)式,由此推出 $z_4 = \inf\lambda_4 = \sqrt{2}$;$z_5 = \inf\lambda_5 = 2\cos\frac{\pi}{5}$,当 $n \geqslant 6$ 时,$z_n = \inf\lambda_n > 2\cos\frac{\pi}{n}$. 吴报强还进一步提出猜想:$z_6 = 2\cos\frac{\pi}{10}$,$z_7 = 2$,$z_8 = \left(\sin\frac{3\pi}{7}\right)/\sin\frac{\pi}{7}$,

见[345]1989.5.这些猜想于 1996 年被熊斌等证明,见[348]1996,8:23.

1991 年,黄鲤颖证明:$n > 6$ 时,$\lambda_n > \frac{\sqrt{n\pi}}{2} - 1$.同年王建宇进一步证明:

$$\sqrt{n} - 1 < z_n = \inf\lambda_n < \left(\frac{2\sqrt{3}n}{\pi}\right)^{1/2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}. \tag{2.77}$$

见[347]1991,2.马茂年(1991)证明:$z_n \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}[\sqrt{n}]$;1995 年朱玉杨证明:

$$z_9 = \inf\lambda_9 \leqslant \frac{2+\sqrt{24\sqrt{2}-30}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} < \csc\frac{\pi}{8}.$$

我们自然要问:λ_n,z_n 最好的上、下界是什么?

1996 年,熊斌等证明:

$$\left(\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\right)^{1/2} - 1 < z_n < \left(\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\right)^{1/2}, \tag{2.78}$$

并进一步问:使

$$\left(\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\right)^{1/2} + c_1 \leqslant z_n \leqslant \left(\frac{n\sqrt{12}}{\pi}\right)^{1/2} + c_2$$

成立的 c_1 的最大值和 c_2 的最小值是什么?

作者们猜想 c_1 的最大值为 $1 - \left(\frac{6\sqrt{3}}{\pi}\right)^{1/2} = -0.81878\cdots$,$c_2$ 的最小值为 0. 见[348]1996,8:23.

(5) 若平面上 n 个点都在同一直线上,则

$$\lambda_n \geqslant \frac{\sqrt{n(n+1)}}{6}. \tag{2.79}$$

(6) 若平面上任给 n 个点中,任三点都能构成一个三角形,每个三角形都有一个面

积，其中最大面积与最小面积之比记为 μ_n，李文志证明 $\mu_4 \geqslant 1, \mu_5 \geqslant \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1), \mu_6 \geqslant 3$，并提出猜想：若 n 个点中任三点都不共线，则

$$\mu_n \geqslant \frac{n^2}{16\log_4 n}. \tag{2.80}$$

而黄鲤颖证明

$$\mu_n > \frac{n}{4} - \frac{1}{2}, \ (n > 6). \tag{2.81}$$

见[99]15:45 - 62 和[348]1994,11:40.

我们还可以进一步问：若给定的 n 个点，不是共面，而是分布在 3 维空间中，相应的 λ_n, z_n 的最优上下界是什么？

(7)　三维空间 R^3 中任给 n 个不同点，其中每 4 点不共面，以这些点为顶点的四面体的最大与最小体积之比记为 α_n，已知 $n \geqslant 4$ 时，

$$\alpha_n \geqslant \frac{n-3}{16}. \text{（黄鲤颖）} \tag{2.82}$$

问：α_n 的下确界的估计式是什么？

2.　**三角形计数不等式**：设平面上的 n 条直线（$n \geqslant 4$）两两相交，三三不共点，它们把平面分为不重迭的区域，将其中的三角形区域数记为 $P_n(3)$，则

$$P_n(3) \geqslant \frac{2}{3}(n-1). \tag{2.83}$$

若将上述“三三不共点”改为“没有任何 $n-1$ 条直线共点”，则

$$P_n(3) \leqslant \frac{2}{5}n(n-1). \tag{2.84}$$

见[34]P33 - 34.

1972 年，Grünbaum, B. 猜想：当 $n \geqslant 16$ 时(2.84)式可改进为

$$P_n(3) \leqslant \frac{1}{3}n(n-1). \tag{2.85}$$

1980 年，Purdy, G. 证明：

$$P_n(3) \leqslant \frac{7}{18}n(n-1) + \frac{1}{3}. \tag{2.86}$$

见[308]1980,79(1):77 - 81.

我们进一步问：$P_n(3)$ 的最优上下界是什么？对于 $P_n(4)$ 等类似问题，有什么结果？

3.　[MCM] 给定平面上 n 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ($n \geqslant 3$)，线段 p_jp_k ($j \neq k$) 中最小值为 r_0，值 r 出现的次数为 $g(r)$，则

(1)　$g(r_0) \leqslant 3n - 6$; (2.87)

(2)　$g(r) < n^{3/2}$. (2.88)

提示：用数学归纳法：$n = 3$ 时，$g(r_0) \leqslant 3$，若(1)对 $n \geqslant 3$ 成立，则对 $n+1$ 个点，其中设 P_{n+1} 是凸包的顶点，P_{n+1} 至多引出 3 条长为 r_0 的线段，去掉 P_{n+1} 后，由归纳假设，至多有 $3n-6$ 条长为 r_0 的线段，于是，这 $n+1$ 个点所成线段中，

$$g(r_0) \leqslant (3n-6) + 3 = 3(n+1) - 6.$$

(3) 对每点 P_k 作以 r 为半径，P_k 为圆心的圆，设在该圆周上有 m_k 个已知点，则 $g(r)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k$. 再考虑以已知点为两个端点的线段，总数为 $\binom{n}{2}$ 条，其中为所作圆的半径及弦的至少有 $f(n)$ 条，此处

$$f(n)=\sum_{k=1}^{m}m_k+\sum_{k=1}^{n}\binom{m_k}{2}-\binom{n}{2}.$$

于是 $f(n)\leqslant\binom{n}{2}$，由此可得(2.88)式.

4. [MCM]，设平面上有 n 条不同直线和 n 个不同的点，使得每条直线上恰有 k 个点，则

$$k<\frac{1}{2}+\sqrt{n}. \tag{2.89}$$

见"数学教学"1991.4.

5. [IMO.30] 设 S 是平面上 n 个点的集合，若对 S 中每点 P，S 中至少存在 k 个点与 P 距离相等，则 $k<\frac{1}{2}+\sqrt{2n}$.

(**注** 原题中还加上"S 中任何三点不共线"的条件，我们去掉了这个多余的条件)

证 以 S 中的两个点为端点的线段称为"好线段". 好线段的条数为 $\binom{n}{2}$，另一方面，以 S 中任一点 P 为圆心，可作一圆，圆上至少有 k 个 S 中的点，从而该圆至少有 $\binom{n}{2}$ 条弦是好线段，这样的圆可作 n 个，由于每两个圆至多有一条公共弦，所以，n 个圆至多有 $\binom{n}{2}$ 条公共弦(重数计算在内)，从而至少有 $g(n)=n\binom{k}{2}-\binom{n}{2}$ 条弦是好线段. 因此 $g(n)\leqslant\binom{n}{2}$，由此推出 $k\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2n-1}$.(见[38]P1527.)

6. [MCM]. 平面上 n 条直线($n\geqslant2$)将平面分成若干个区域，将其中某些区域涂上颜色，并使任何两个着色区域没有公共边(若两个区域只有一个公共点，则不算有公共边). 则着色区域数目不超过 $\frac{1}{3}n(n+1)$.

7. 平面上有 n 条直线 $L_1,\cdots,L_n$($n\geqslant4$)，其中任意两条都相交，任意三条不共点，它们将平面分成不相重叠的区域，其中三角形区域的全体记为 B_n，则 B_n 的个数为 $g(n)\geqslant\frac{2}{3}(n-1)$.(提示：利用最小数原理).

8. 平面上有 n 个点($n\geqslant5$)，任意三点不共线，从中取4点，使得以它们为顶点可作凸四边形，这种取法全体记为 A_n，则 A_n 的个数为

$$h(n)\geqslant\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}. \tag{2.90}$$

提示：先证 $h(5)\geqslant1$，当 $n\geqslant6$ 时，每5点为一组，共有 $\binom{n}{5}$ 组，每组有一个凸四边形，

但每个凸四边形至多被重复计算 $n-4$ 次,由此推出(2.90).

9. [MCM].设 $f(j,k)$ 是平面上格点的集合($1\leqslant j\leqslant m,1\leqslant k\leqslant n$),它不含相邻元素的子集的个数记为 $g(m,n)$.即这种子集不含同时含有两个满足 $|j_1-k_1|+|j_2-k_2|=1$ 的有序对 $(j_1,k_1),(j_2,k_2)$,则

$$\{g(m,2k)\}^2\leqslant g(m,2k-1)g(m,2k+1).$$

证明见[348]1989,5:38.

10. 设 $N(m)$ 表示自然数 m 作为二项式系数 $\binom{n}{k}$ 形式出现的次数.例如 $N(1)=\infty,N(2)=1,N(3)=N(4)=N(5)=2,n(6)=3$,等等.则当 $m>1$,有

$$N(m)\leqslant 2+2\log_2 m..$$