# 第十章　行列式与矩阵不等式

在本章中,设 $n$ 阶实方阵为

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

相应的行列式记为

$$D = |A| = \det A = \det(a_{ij}).$$

若 $a_{ij} = a_{ji}, i, j = 1, \cdots, n$,则 $A$ 称为对**称矩阵**;若实对称矩阵 $A$ 的特征值都大于 0(或非负),则 $A$ 称为**正定矩阵**(或**半正定矩阵**);若 $A$ 为复方阵,且 $A$ 的转置矩阵$A'$ 等于 $A$ 的共轭矩阵$\overline{A}$,则称 $A$ 为 **Hermite 矩阵**. 记 $A^* = \overline{A'}$;$A^{-1}$ 表示 $A$ 的逆矩阵,$A \otimes B$ 表示 $A$ 与$B$ 的 Kronecker 乘积,$A \circ B$ 表示$A$ 与$B$ 的 Hadamard 乘积(或 Suhur 乘积). $r(A)$ 表示矩阵 $A$ 的秩(即非零矩阵中不等于零的子式的最大阶数);tr$A$ 表示$A$ 的迹(即 $A$ 的主对角线上各元素之和):$\mathrm{tr}A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$. $\lambda(A)$ 表示 $A$ 的**特征值**,即 $A$ 的特征方程 $\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$ 的根 $\lambda_k (1 \leqslant k \leqslant n)$,其中 $I_n$ 表示$n$ 阶单位矩阵;$\sigma(A)$ 表示 $A$ 的**奇异值**. $\sigma_k(A) = \lambda_k(A^* A)^{1/2}$.

$\rho(A) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |\lambda_k(A)|$ 称为 $A$ 的**谱半径**. 若 $\forall a_{kj} > 0$,则称 $A$ 为**正矩阵**,记为 $A > 0$;若 $\forall a_{kj} \geqslant 0$,则称 $A$ 为**非负矩阵**,记为 $A \geqslant 0$;若 $A - B > 0(\geqslant 0)$,则记为 $A > B(A \geqslant B)$. 若方阵 $A$ 满足$\overline{A'} = A^{-1}$,则称 $A$ 为**酉矩阵**. 若$\overline{A'}A = A\overline{A'}$,(即 $A$ 与$\overline{A'}$ 可交换)则称 $A$ 为**正规矩阵**. 实对称矩阵,Hermite 矩阵、正交矩阵与酉矩阵都是正规矩阵.

$n$ 阶方阵$A$ 的积和式定义为

$$\mathrm{per}(A) = \sum_{\sigma} \Big( \prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)} \Big),$$

式中求和遍及$\{1,2,\cdots,n\}$ 的一切排列 $\sigma$.

若 $A$ 的每一行元素的和,以及每一列元素的和都等于 1,则称 $A$ 为**双随机矩阵**.

设 $A(i_1, \cdots, i_k)$ 表示 $A$ 的第$i_1, \cdots, i_k$ 行和列交叉处元素组成的主子阵,相应的主子式记为 $\det A(i_1, \cdots, i_n)$.

$$P_k(A) = \prod_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \det A(i_1, \cdots, i_k).$$

称为 $A$ 的所有$k$ 阶主子式之积.

其中的乘积共有$\binom{n}{k}$个,$P_1(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. 特别 $P_n(A) = |A|$;$P_1(A) = \prod\limits_{k=1}^{n} a_{kk}$.

## §1 行列式不等式

1. **Hadamard 不等式**(1893):设 $D$ 是具有复元素 $a_{kj}(k,j=1,\cdots,n)$ 的矩阵 $A$ 的行列式,则

$$D^2=|A|^2\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|^2\right).\tag{1.1}$$

仅当对于每对不同的 $k,j$,$\sum_{m=1}^{n}a_{km}\bar{a}_{jm}=0$ (1.1) 式右边的因子中至少有一个等于零时等号成立.

(1.1)式的几何意义:$n$ 维空间中平行六面体的体积不大于它从某一顶点出发的各边长度之积,而当这些边互相垂直或某一边的长度为零时则等于这个乘积.

特别当 $\forall a_{kj}$ 为实数且 $|a_{kj}|\leqslant M$ 时从(1.1)得到 $D\leqslant M^n n^{n/2}$,仅当 $\forall a_{kj}=1$ 或 $-1$,且 $AA'=nI$($I$ 为 $n$ 阶单位矩阵)时等号成立,这样的矩阵称为 Hadamard 矩阵.

(见 Bull,Sci,Math,1893,17(2):240 - 246)

若 $A=(a_{kj})$ 为 $n\times m$ 矩阵,则

$$|AA^*|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}|a_{kj}|^2\right),\tag{1.2}$$

仅当 $A$ 的行向量相互正交时等号成立.

若 $A=(a_{kj})$ 是 $n$ 阶半正定 Hermite 矩阵,则

$$|A|\leqslant\prod_{k=1}^{n}a_{kk},\tag{1.3}$$

仅当 $A$ 为对角阵时等号成立.

利用 Hadamard 不等式可以推出许多其他不等式,目前对于 Hadamard 不等式已有上百种不同的证明方法.(见[30]P.81 - 84 和[2]P.64)

Hadamard 不等式已有许多推广和改进:

(1) 若将 $A$ 中 $a_{kj}$ 换成矩阵 $A_{kj}$,就可将(1.3)式推广为 **Fischer 不等式**:设下述 $A$ 为半正定 Hermite 矩阵:

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m}\\ \cdots & & & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm}\end{pmatrix},$$

式中 $A_{kk}$ 为 $k$ 阶方阵,则

$$|A|\leqslant\prod_{k=1}^{m}|A_{kk}|$$

仅当 $A$ 为准对角阵,即 $A_{kj}=0(k\neq j)$ 时等号成立.

证明见[30]P84,由此推出:将 $A$ 分块为 $A=(A_1:A_2)$,则

$$|A|^2\leqslant|A_1^*A_1|\cdot|A_2^*A_2|.$$

仅当 $A_1^* A_2 = 0$ 时等号成立.

(2) **Szasz 不等式**:设 $A$ 为 $n$ 阶正定 Hermite 阵,则

$$|A| = P_n(A) \leqslant (P_{n-1}(A))^{\alpha_{n-2}} \leqslant \cdots \leqslant [P_{k+1}(A)]^{\alpha_k} \leqslant [P_k(A)]^{\alpha_{k-1}} \leqslant \cdots \leqslant (P_3(A))^{\alpha_2} \leqslant (P_2(A))^{\alpha_1} \leqslant P_1(A).$$

式中 $\alpha_k = \binom{n-1}{k}^{-1}$ 证明见[30]$P85-86$,或[360]1957,8:274 - 275.

由此推出:$|A| \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} |A_{(i)}|\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

式中 $A_{(i)}$ 表示除去 $A$ 的第 $i$ 行和第 $i$ 列后剩下的子阵. 王谅儒证明 $P_{n-j}^{\alpha}P_k^{\beta}$ 关于 $k$ 是递增的. 其中 $k = 0,1,\cdots,n-j-1, j = 0,1,\cdots,n-1$,

$$\alpha = -\frac{n-j}{n-j-k},\ \beta = \frac{\binom{n-k}{j}}{\binom{n-j-1}{k}},$$

见[345]1989,5:28.

(3) 设 $A = (a_{ij})$ 是 $n \times n$ 实方阵,令

$$A_1 = \left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} : a_{ij} > 0\right\},\ A_2 = \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : a_{ij} \leqslant 0\right\}, D = |A|,$$

1978 年,Schinzel 证明:

$$D \leqslant \prod_{i=1}^{n} (\max(A_1, A_2)),$$

1980 年,Johnson 与 Newman 将上式改进为:

$$D \leqslant \prod_{i=1}^{n} (\max(A_1, A_2)) - \prod_{i=1}^{n} (\min(A_1, A_2)).$$

同年,Minc 证明对复方阵也有类似的不等式. 但对于非负实方阵,上式反而不及 Hadamard 不等式.

1986 年屠伯埙对 Hadamard 不等式作了实质性的改进,证明:对于 $n \times n$ 阶非奇异复方阵 $A = (a_{ij})$,成立

$$D^2 \leqslant \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left[\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 - \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\bar{a}_{jk}\right|^2}{\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2}\right)\right].$$

作者猜测,上式对四元数除环上的可中心化非奇异阵仍成立,见复旦大学学报 1986,25(4):429 - 435.

1989 年李广兴证明:设 $A = (a_{jk})$ 是半正定 Hermite 方阵,$\sigma$ 为非恒等置换,则

$$D = \det A \leqslant \prod_{k=1}^{n} a_{kk} - \left|\prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}\right|, \quad \mathrm{per} A \geqslant \prod_{k=1}^{n} a_{kk} + \left|\prod_{k=1}^{n} a_{k\sigma(k)}\right|.$$

这两个不等式加强了 Hadamard 不等式和 Marcus 不等式. 见[339]1989,9(3):372 - 374.

(4) 设 $A = (a_{kj})$ 为 $n$ 阶方阵,令

$$\tilde{a}_{kj} = \begin{cases} |a_{kk}|, & k = j, \\ -|a_{kj}|, & k \neq j. \end{cases}$$

则 $M(A) = (\tilde{a}_{kj})$ 称为 $A$ 的比较矩阵;

若 $|a_{kk}| > R_k(A) = \sum_{j \neq k} |a_{kj}|. 1, 2, \cdots, n$,

则称 $A$ 为严格对角占优矩阵,于是成立

$$|\det A| \geqslant \prod_{k=1}^{n} [|a_{kk}| - R_k(A)];$$

$$|\det A| \geqslant \det M(A) \geqslant \max_k \{|a_{kk}| \prod_{j \neq k} (|a_{jj}| - R_j(A))\}.$$

(胡永建,[345]1994,7:38 - 41).

(5) **Oppenhein 不等式**:设 $A, B$ 是 $n$ 阶正定 Hermite 方阵,则

$$(\det A) \prod_{k=1}^{n} b_{kk} \leqslant \det(A o B).$$

式中 $AoB$ 是 $A$ 与 $B$ 的 Hadamard 乘积. 由此推出:

$$\det A \det B \leqslant \det(AoB) \leqslant (\prod_{k=1}^{n} a_{kk})(\prod_{k=1}^{n} b_{kk}); \quad \det(AoA^{-1}) \geqslant 1.$$

证明见[30]$P88 - 89$.

2. 设 $A$、$B$ 为 $n$ 阶半正定 Hermite 方阵.

令 $S_+(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$, $S_-(A) = \frac{1}{2}(A - A^*)$.

若 $A^* = A$ 为正定矩阵. $S_+(B)$ 为半正定矩阵,则

(1) $|\det(A + B)| \geqslant \det(A) + |\det(B)|$.

由此推出:当 $S_+(A)$ 为正定矩阵时,成立 $|\det A| \geqslant \det(S_+(A)) + |\det(S_-(A))|$. 它是下述 Ostrowski-Taussky 不等式的改进:

$|\det A| \geqslant \det S_+(A)$,仅当 $S_-(A) = 0$ 时等号成立.

(2) 若 $\det(\lambda A - B) = 0$ 的复根个数为 $m$,令 $p = \dfrac{2}{2n - m}$,则

$$|\det(A + B)|^p \geqslant (\det A)^p + |\det B|^p.$$

仅当 $\det(\lambda A - B) = 0$ 的复根为纯虚数且模长相等,实根相等并等于复根模平方时等号成立;

$$|\det(A + B)|^{1/n} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2n}} (|\det A|^{1/n} + |\det B|^{1/n});$$

$$|\det(\lambda A + (1 - \lambda)B)| \geqslant [\lambda^\lambda (1 - \lambda)^{1-\lambda}]^{\frac{m}{2}} |\det A|^\lambda |\det B|^{1-\lambda}.$$

由此推出,当 $A^* = A$, $B^* = B$ 均为正定矩阵时. 成立 **Minkowski 不等式**:

$$(\det(A + B))^{1/n} \geqslant (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}. \tag{1.4}$$

仅当 $B = \lambda A(\lambda > 0)$ 时等号成立.(何淦瞳,[339]2002,22(1):79)

Fan ky 从另一角度推广上述 Minkowski 不等式:

设 $A,B$ 为 $n$ 阶正定方阵，$A_k$ 是 $A$ 的由前 $k$ 行和前 $k$ 列形成的主子矩阵，则

$$\left(\frac{\det A}{\det A_k}\right)^{\frac{1}{n-k}}+\left(\frac{\det B}{\det B_k}\right)^{\frac{1}{n-k}}\leqslant\left(\frac{\det (A+B)}{\det (A_k+B_k)}\right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

正定矩阵的 Minkowski 不等式(1.4) 还有以下推广：

$$p(\det A)^{m/n}+q(\det B)^{m/n}\leqslant[\det(pA+qB)]^{\frac{m}{n}},$$

仅当 $A=\alpha B,(\alpha>0)$ 时等号成立；

设 $A_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 为 $n$ 阶正定矩阵，则 $\forall\, p_k>0$，有

$$\sum_{k=1}^{m}p_k[\det(A_k)]^{1/n}\leqslant\left[\det\left(\sum_{k=1}^{m}p_kA_k\right)\right]^{1/n},$$

证明可用凸函数不等式，数学归纳法等，见[345]1989,7:18;1985,3:31，[2]P70;[342]1991,3:64 - 66.冯慈璜，杭州大学学报，1994,21(1):11 - 15.

郝稚传证明：设 $A_{kj}$ 为正定同阶 Hermite 矩阵，$p_k>0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}p_k=1,m,n\geqslant 2$，则

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\prod_{j=1}^{n}(\det A_{kj})^{p_j}\right]<\prod_{j=1}^{n}\left[\det\left(\sum_{k=1}^{m}A_{kj}\right)\right]^{p_j}.\tag{1.5}$$

见[344]1985.4.

1987 年张福振指出，(1.5) 式对于 $\sum\limits_{k=1}^{m}p_k\geqslant 1$ 也成立，见[344]1987,2.

1990 年沈光星讨论 $\sum p_k<1$ 的情形.证明：

① 设 $A_{kj}$ 都是 $r\geqslant 2$ 阶 Hermite 正定矩阵，$p_k>0,\sum\limits_{k=1}^{m}p_k\geqslant\dfrac{1}{r}$，则

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\prod_{j=1}^{n}(\det(A_{kj}))^{p_j}\right]\leqslant\prod_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}A_{kj}\right)\right]^{p_j},\tag{1.6}$$

仅当 $A_{kj}$ 都为某矩阵 $B_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 的倍数且 $\sum\limits_{j=1}^{m}p_j=\dfrac{1}{r}$ 时等号成立.(1.6) 式对实对称正定矩阵也成立；

② 设 $A_{kj}$ 都是 $r\geqslant 2$ 阶 Hermite 半正定矩阵，或实对称半正定矩阵，$0<p\leqslant\dfrac{1}{r}$，则

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{m}(\det A_{kj})^{p}\right]^{\frac{1}{rp}}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{m}\det\left(\sum_{j=1}^{n}A_{kj}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{rp}};$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(\det A_{kj})^{p}\right]^{\frac{1}{rp}}\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}\det\left(\sum_{k=1}^{m}A_{kj}\right)^{p}\right]^{\frac{1}{rp}}.$$

见杭州师院学报，1990,3:14 - 18.

3. 设 $A_{kj}$ 是 $n$ 阶方阵 $A$ 相应行列式 $\det A$ 中 $a_{kj}$ 的代数余子式，则

$$(\det A)^{n-1}\leqslant\prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}(A_{kj})^2\right]^{1/2},$$

仅当 $\sum\limits_{i\neq j}(a_{ik}a_{jk})=0$ 时等号成立.

$$\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^2\right)^{1/2}\right]^{n-1}\leqslant\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\prod_{m\neq k}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{mj}^2\right)^{1/2}\right]^{n},$$

仅当$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}^2 = \cdots = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}^2$时等号成立.(尹景尧.[345]1983,2:25－28)

4. 设$A$、$B$为半正定 Hermite 方阵,则

$$\det(A+B) \geqslant \det(A)+\det(B).$$

仅当$A=0$或$B=0$或$\det(A+B)=0$时等号成立.

**推论**　设$A,B,A-B$均为半正定方阵,则 $\det(A) \geqslant \det(B)$.

(华罗庚.[334]1995,5:463－470).

5. 将方阵$A$分块为

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

当$A_{11}$可逆时,$A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$称为$A_{11}$在$A$中的 Schur 补矩阵,记为$(A/A_{11})$,则

(1)　$A$为正定 Hermite 方阵的充要条件是$A_{11},(A/A_{11})$均为正定矩阵.

(2)　$\det(A/A_{11})=\dfrac{\det A}{\det A_{11}}$.

(3)　设$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$,

$A$与$B$,$A_{11}$与$B_{11}$各具有相同阶.$A_{11}$、$B_{11}$为正定矩阵,则

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_{11}+B_{11})} \geqslant \frac{\det A}{\det A_{11}}+\frac{\det B}{\det B_{11}}.$$

此外,若$A,B$为半正定矩阵,则$((A+B)/(A_{11}+B_{11}))-(A/A_{11})-(B/B_{11})$仍为半正定矩阵.(见[30]P73－76)

6. **Bergstrom 不等式**:设$A,B$为同阶正定 Hermite 矩阵,$A_i,B_i$分别表示$A,B$删去第$i$行和第$i$列后剩下的子矩阵,则

$$\frac{\det(A+B)}{\det(A_i+B_i)} \geqslant \frac{\det A}{\det A_i}+\frac{\det B}{\det B_i}.$$

该不等式已有许多推广形式,例如:

(1)　设$A,B$是$n$阶正定矩阵,$E=\lambda A+(1-\lambda)B, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,$A^j$表示$A$删去头$j-1$行与头$j-1$列后得到的主子矩阵,实数$\alpha_k$满足$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \geqslant 0, m=1,2,\cdots,n$,则

$$\prod_{j=1}^{n} (\det E^j)^{\alpha_j} \geqslant \prod_{j=1}^{n} (\det A^j)^{\lambda\alpha_j} (\det B^j)^{(1-\lambda)\alpha_j}.$$

(2)　设$A$是$n$阶正定实矩阵,则$\forall x,y \in R^n$,成立

$$(x,y)^2 \leqslant (x,Ax)(y,A^{-1}y).$$

证明及其推广见[2]P67－69.

7. 设$A,B$为$n$阶半正定 Hermite 方阵.$A_k$表示$A$的左上角$k$阶子方阵,若$A_k,B_k$均为正定矩阵,$k=1,2,\cdots,n-1$,则

$$\det(A+B) \geqslant \det A\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\det B_k}{\det A_k}\right)+\det B\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\det A_k}{\det B_k}\right)+(2^n-2n)(\det A \det B)^{1/2}.$$

提示:利用数学归纳法,见[30]P.76 - 79.

8. 设 $A = (a_{kj})$ 是 $n$ 阶实正定方阵.

$$A_{rs} = \begin{pmatrix} a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rs} \\ a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,s} \\ \cdots & & & \\ a_{sr} & a_{s,r+1} & \cdots & a_{ss} \end{pmatrix}, 1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n.$$

则 $\det A_{1n} \leqslant (\det A_{1k})(\det A_{k+1,n})$. 特别地,$\det A \leqslant \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$. 另见[344]1994,2:45 - 47.

9. **Fan Ky 不等式**:设 $|A|_k = \lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_{n-k+1}$ 是实正定矩阵 $A$ 的头 $k$ 个最小特征根之积,则对于 $n$ 阶实正定矩阵 $A$,$B$ 以及 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,有 $|\lambda A + (1-\lambda)B|_k \geqslant |A|_k^{\lambda} |B|_k^{1-\lambda}$. 证明及其各种变形和推广见[2]$P$.74 - 79.

10. **Fan Ky 凹性定理**:设 $A$,$B$ 为实正定矩阵,则对于 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,有

$$|\lambda A + (1-\lambda)B| \geqslant |A|^{\lambda} |B|^{1-\lambda}. \tag{1.7}$$

提示:当 $\lambda = 0$ 或 1 时,(1.7) 式显然成立,所以不妨设 $0 < \lambda < 1$. 用 Hölder 不等式,有

$$\frac{\pi^{n/2}}{|\lambda A + (1-\lambda)B|^{1/2}} = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\lambda(x,Ax) - (1-\lambda)(x,Bx))\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x,Ax)]\mathrm{d}x\right)^{\lambda} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x,Bx)]\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}$$

$$\leqslant \pi^{n/2} |A|^{-\lambda/2} |B|^{-(\frac{1-\lambda}{2})}.$$

上式就等价于(1.7) 式,见[2]P.63.

1981 年胡克将(1.7) 式改进为:设 $A$,$B$,$C$ 为三个 $n$ 阶实正定矩阵. $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,令 $M(\lambda) = \min\{\lambda, 1-\lambda\}$,则

$$|\lambda A + (1-\lambda)B| \geqslant |A|^{\lambda} |B|^{1-\lambda}\left[1 - \left(\frac{\sqrt{|A|}}{\sqrt{|A+C|}} - \frac{\sqrt{|B|}}{\sqrt{|B+C|}}\right)^2\right]^{-M(\lambda)}.$$

(证明见[364]1981,2:141 - 148 或[121]P.143 - 144)

同年胡克进一步证明,设 $A$,$B$,$C$ 为 $n$ 阶实正定矩阵,则当 $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时,有

$$|\lambda A + (1-\lambda)B|^{-1} \leqslant |A|^{1-2\lambda}\{(|A|\cdot|B|)^{-1} - $$
$$- (|A+C|\cdot|B|)^{-1/2} - (|A|\cdot|B+C|)^{-1/2}]^2\}^{1-\lambda}.$$

见[364]1981,8:1047 - 1055.

11. **华罗庚不等式**:设 $A$,$B$ 为同阶复方阵. $I - AA^*$ 与 $I - BB^*$ 均为正定矩阵,则

$$\det(I - AA^*)\det(I - BB^*) \leqslant |\det(I - AB^*)|^2,$$

仅当 $A = B$ 时等号成立.

王松桂([30]$P$.91 - 92) 改进为:

$$\det(I - AA^*)\det(I - BB^*) + |\det(A - B)|^2 \leqslant |\det(I - AB^*)|^2.$$

进一步的推广见[6]P.235.

12. **Lavoie 不等式**:设 $A$ 为 $m \times n$ 阶复矩阵,将其分块为:

$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_k\end{pmatrix}$ 式中 $A_i$ 为 $m_i\times n$ 矩阵，$\sum_{k=1}^{k}m_i=m$. $A_i^+$ 为 $A_i$ 的 Moore-Penrose 广义逆阵，令 $B=(A_1^+,\cdots,A_k^+)$，则 $0\leqslant\det(AB)\leqslant1$，仅当 $r(A)<m$ 时，左边等号成立；而仅当 $A_iA_j^*=0\ (\forall i\neq j)$ 时，右边等号成立. 证明见[30]P95－96.

13. **Price 不等式**：设 $A=(a_{kj})$ 为 $n$ 阶复方阵，令 $S_k=\sum_{j=k+1}^{n}|a_{kj}|,k=1,\cdots,n$. 若 $|a_{kk}|>\sum_{j\neq k}|a_{kj}|,k=1,\cdots,n$. 则

$$0<\prod_{k=1}^{n}(|a_{kk}|-S_k)\leqslant|\det A|\leqslant\prod_{k=1}^{n}(|a_{kk}|+S_k).$$

仅当 $A$ 为下三角阵时，等号成立. 证明见[30]P97－98.

Fan Ky 改进和推广了上述不等式，见[317]1971,3(2):187－189.

14. **BW 不等式(Bloomfield－Watson 不等式)**：设 $A$ 为 $n$ 阶半正定 Hermite 方阵，$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$ 为 $A$ 的特征值，若 $\forall\, n\times m$ 矩阵 $B$ 满足 $B^*B=I_k$，则

$$\prod_{k=n-m+1}^{n}\lambda_k\leqslant\det(B^*AB)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\lambda_k.$$

若 $A$ 为 $n$ 阶正定 Hermite 方阵，$n>2m$，则

$$\det(B^*AB)\det(B^*A^{-1}B)\leqslant\prod_{k=1}^{m}\frac{(\lambda_k+\lambda_{n-k+1})^2}{4\lambda_k\lambda_{n-k+1}}.$$

证明及其推广见[30]P. 99 和 P. 149－153.

15. **Gram 不等式**：设 $\{x_k\}(k=1,\cdots,n)$ 为内积空间 $X$ 中 $n$ 个元，内积 $(x_i,x_j)$ 记为 $a_{ij}$，由这些内积构成的 $n$ 阶方阵记为 $G(x_1,\cdots,x_n)=(a_{ij})$，称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的 **Gram 矩阵**，它是 Hermite 对称矩阵，即 $(i,j)$ 是 $(j,i)$ 的共轭复数，$G$ 的行列式 $|G(x_1,\cdots,x_n)|$ 称为 **Gram 行列式**. 令 $\|x_j\|^2=(x_j,x_j),j=1,\cdots,n$. 若 $x_j\neq0$(即 $x_j$ 为非零元)，$j=1,\cdots,n$ 则

$$0\leqslant|G(x_1,\cdots,x_n)|\leqslant\|x_1\|^2\cdots\|x_n\|^2.$$

式中 $|G(x_1,\cdots,x_n)|=0\Leftrightarrow x_1,\cdots,x_n$ 线性相关，$|G(x_1,\cdots,x_n)|=\|x_1\|^2\cdots\|x_n\|^2\Leftrightarrow x_1,\cdots,x_n$ 正交.

**推论 1** Gauchy 不等式的推广

(1) 离散形式：令 $A_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$，则 $\det(A_{ij})\geqslant0$.

(2) 积分形式：令 $A_{ij}=\int f_if_j\mathrm{d}x$，则 $\det(A_{ij})\geqslant0$，

仅当 $f_1,\cdots,f_n$ 线性相关时等号成立.

若 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 是内积空间 $X$ 中的线性无关组，则对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$，有

$G(y_1,\cdots,y_n)\leqslant G(y_1,\cdots,y_k)\cdot G(y_{k+1},\cdots,y_n)$，

仅当 $M_1=\{y_1,\cdots,y_k\}$ 中的每个元素都正交于 $M_2=\{y_{k+1},\cdots,y_n\}$ 中的每个元素时等号成立.

16. **Minkowski 猜想**:设 $A=(a_{kj})$ 为实 $n$ 阶方阵,$\det A\neq 0$,令

$$y_k=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j,1\leqslant k\leqslant n,$$

则 $\forall$ 实数 $b_k(1\leqslant k\leqslant n)$,存在整数 $x_1,\cdots,x_n$,使得

$$\prod_{k=1}^{n}|y_k-b_k|\leqslant 2^{-n}|\det A|. \tag{1.8}$$

1918 年 Minkowski 证明了 $n=2$ 时上式成立,目前已知 $n\leqslant 5$ 时上式也成立,当 $n>5$ 时,已知在某些附加条件下,上式成立.令 $m$ 为 $\prod\limits_{k=1}^{n}|y_k-b_k|$ 的下界.则

$$m\leqslant 2^{-\frac{n}{2}}|\det A|.$$

(见[107]3:761).

17. 设 $A,B$ 为 $n$ 阶正定矩阵,$I_\alpha=\alpha I(\alpha>0)$ 为数量矩阵,$\det(A)>\det(I_\alpha)$,$\det(B)>\det(I_\beta)$,则

$$[\det(A+B)-\det(I_\alpha+I_\beta)]^{1/n}\geqslant[\det(A)-\det(I_\alpha)]^{1/n}+[\det(B)-\det(I_\beta)]^{1/n},$$

仅当 $\alpha^{-1}A=\beta^{-1}B$ 时等号成立.[345]1990,8:36.

18. [MCM] 设 $A=(a_{kj})$ 为 $n$ 阶非负矩阵,它有如下性质:若某个 $a_{kj}=0$,则 $\sum\limits_{m=1}^{n}a_{km}+\sum\limits_{m=1}^{n}a_{mj}\geqslant n$.于是 $A$ 的所有元素之和不小于 $\frac{1}{2}n^2$.(13 届 *IMO*).

**证** 可先通过换行或换列,使得有尽可能大的 $m$,满足 $a_{11}=\cdots=a_{mm}=0$,这时 $k,j>m$ 时 $a_{kj}\neq 0$,当 $k\leqslant m,j>m$ 时,若 $a_{kj}=0$,则 $a_{jk}\neq 0$,从而 $\sum\limits_{m=1}^{n}(a_{jm}+a_{mj})\geqslant n$.于是

$$2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{kj}+a_{jk})\geqslant n^2.\text{证毕.}$$

# §2 矩阵不等式

## 一、 矩阵特征值与奇异值不等式

设 $A=(a_{kj})$ 为 $n$ 阶复方阵,$\lambda(A),\sigma(A)$ 分别为 $A$ 的任一特征值和奇异值.当 $A$ 为实对称或实正定方阵时,$\lambda(A)$ 为实数,我们总设 $A$ 的 $n$ 个特征值和奇异值从大到小排列:

$$|\lambda_1(A)|\geqslant|\lambda_2(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n(A)|;\ |\sigma_1(A)|\geqslant|\sigma_2(A)|\geqslant\cdots\geqslant|\sigma_n(A)|;$$

$\rho(A)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\lambda_k(A)|$ 为 $A$ 的谱半径.因为 $\det A=\prod\limits_{k=1}^{n}\lambda_k(A)$,所以,$A$ 的行列式