§ 4　双曲函数不等式

1.　$1+\mathrm{sh}x \leqslant \mathrm{ch}x$.

2.　设 $x>0, a \geqslant \sqrt{2}$,则 $a \cdot \mathrm{th}x > \sin(ax)$.　证明见[305]1986,93(5).

3.　设 $x>0$,则 $\sin x\cos x < \mathrm{th}x < x < (1/3)(2\mathrm{sh}x + \mathrm{th}x)$.

4.　设 $x>0$,则

$$\frac{\mathrm{sh}x}{\sqrt{\mathrm{ch}(2x)}} < \mathrm{th}x < (\mathrm{sh}x)\exp(1 - x\,\mathrm{cth}x) < 2\mathrm{th}(x/2) < x < \mathrm{sh}x < (1/2)\mathrm{sh}(2x).$$

见[345]1987,7:18;[305]1985,92(1).

5. 设 $x \geqslant 0$ 时，$0 \leqslant \ln\mathrm{ch}x \leqslant x\,\mathrm{th}(x/2)$.

6. $3x \leqslant \mathrm{sh}3x \leqslant x\,\mathrm{ch}3x + 2x \leqslant 3x\,\mathrm{ch}3x$.

7. 设 $x > 0$，则 $\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right) \leqslant \mathrm{cth}x - \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{x}\ln\mathrm{ch}x \leqslant \mathrm{cth}\,\frac{3x}{2} - \frac{2}{3x}$

$$\leqslant \mathrm{th}\,\frac{x}{2} \leqslant \mathrm{th}x \leqslant \mathrm{cth}\left(\frac{3x}{2}\right) - \frac{3x/2}{[\mathrm{sh}(3x/2)]^2}.$$

N5 ~ 7 见 Stolarsky, K. B. [301] 1996, 202(3): 810 − 818. 该文还提出了四个未解决的问题.

8. 设 $x, y \geqslant 0$，则

$|\mathrm{ch}x - \mathrm{ch}y| \geqslant |x - y|(\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y)^{1/2}$.

9. **Lazarevic 不等式**: $\mathrm{ch}x < \left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right)^3 \quad (x \neq 0)$. (4.1)

其中 3 是最佳指数.

证明：令 $f(x) = x - \mathrm{sh}x(\mathrm{ch}x)^{(-1/3)}$, (4.2)

注意(4.1)式两端都是偶函数，所以，不妨设 x 是正数. 因为

$$f(0) = f'(0) = 0, f''(x) = -\frac{4}{9}(\mathrm{sh}x)^3(\mathrm{ch}x)^{-7/3},$$

所以 $f(x)$ 是 $(0, \infty)$ 上的凹函数，并且它的曲线在原点与 x 轴相切，从而在 $(0, \infty)$ 上，$f(x) < 0$，于是(4.1)式得证.

为了证明使

$$\mathrm{ch}x < \left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right)^a, (x \neq 0) \tag{4.3}$$

成立的 a 的最小值是 3，只要比较(4.3)式两边在原点的 Taylor 级数展开式：

$$\mathrm{ch}x = 1 + x^2/2! + \cdots. \qquad \left(\frac{\mathrm{sh}x}{x}\right)^a = 1 + \frac{a}{3}\cdot\frac{x^2}{2} + \cdots.$$

另证 不妨设 $x > 0$，利用 $\mathrm{sh}^3x = \frac{1}{4}\mathrm{sh}3x - \frac{3}{4}\mathrm{sh}x$，两边作 Taylor 级数展开，比较两边 x^{2n+1} 的系数，并利用 $4(2n-1)2n(2n+1) + 3 \leqslant 3^{2n+1}$.

10. **Garnir 不等式**: $\mathrm{arctg}x \leqslant \frac{\pi}{2}\mathrm{th}x, (x \geqslant 0)$. (见[4]P. 369 − 370)

11. 设 $0 < x < 5$，则

$$\frac{(3 + (x^2/11))\mathrm{sh}x}{2 + \mathrm{ch}x + (x^2/11)} < x < \frac{[3 + (x^2/10)]\mathrm{sh}x}{2 + \mathrm{ch}x + (x^2/10)}.$$

见[305] 1954, 61: 623 − 626.

12. **Frame 不等式**. 设 $x > 0$，则当 $r > 1$ 时，有

$$(\mathrm{sh}rx)^{r+1} + (\mathrm{ch}rx)^{r+1} \leqslant (\mathrm{ch}(r+1)x)^r;$$

当 $0 < r < 1$ 时，不等号反向，当 $x = 0$ 或 $r = 0$ 或 $r = 1$ 时等号成立. 见[305] 1938, 45: 54 − 56.

13. $\int_0^1 \mathrm{th}\left(\frac{1}{ax}\right)\mathrm{d}x < \begin{cases} 1, & 0 < a \leqslant 1, \\ (1 + \ln a)/a, & a > 1. \end{cases}$

证 利用 $\mathrm{th}x < 1$ 及 $\mathrm{th}x < x \ (x > 0)$，得到 $\mathrm{th}\,\frac{1}{ax} < \min\left\{1, \frac{1}{ax}\right\}, (a, x > 0)$.

积分得

$$\int_0^1 \text{th}\left(\frac{1}{ax}\right)\mathrm{d}x < \int_0^1 \min\left\{1,\frac{1}{ax}\right\}\mathrm{d}x,(a>0).$$

14. 设 $x>0$,则 $\text{sh}x < x\text{ch}x$.

提示:对于要证的不等式两边作 Taylor 级数展开,然后比较两边 x^{2n+1} 的系数. 见[301]1988,131:271 - 281.

15. 若 $0<x<\pi/2$,则

$$\sqrt{\sin x\cdot \text{sh}x} < x < (\sin x+\text{sh}x)/2.$$

提示:令 $f(x)=x^2-\sin x\cdot \text{sh}x$,求 f 的四阶导数:$f^{(4)}(x)=4\sin x\,\text{sh}x>0$.

16. [MCU]. 设 $x,y\geqslant 0,p,q\geqslant 0,p+q=1,0\leqslant t\leqslant\left|\ln\left(\frac{x}{y}\right)\right|$.则

$$x^p y^q \leqslant x\frac{\text{sh}(tp)}{\text{sh}t}+y\frac{\text{sh}(tq)}{\text{sh}t}.$$

(见[301]1996,202(3):810 - 818,52 届普特南数学竞赛)