§2　级数不等式

1.　[MCU]. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n^{1/p}} < p,(p > 1)$.

提示:利用$\frac{1}{(n+1)n^{1/p}} = (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})\frac{n}{n^{1/p}}$.

2.　设 $1/p + 1/q = 1, 1 < p < \infty$,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n+k}\left(\frac{n}{k}\right)^{1/p}<\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{p})}-\frac{1-c}{n^{1/q}}.$$

式中 c 为 Euler 常数.

(杨必成,高明哲,见[335]1997,26(2):159 - 164.或[308]1998,126(3):751 - 759)

3. **Mathieu 不等式**:1890 年,Mathieu 猜想

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+x^2)^2}<\frac{1}{x^2}. \tag{2.1}$$

((2.1)式与固体的弹性研究有关).直到 1952 年才由 Berg 证明.随后许多数学家都在寻求形如不等式

$$\frac{1}{x^2+a}<S(x)<\frac{1}{x^2+b}\quad(x\neq 0) \tag{2.2}$$

中 a,b 的最佳值,这些最佳值最终为 Alzer,H. 等 1997 年得到:$a=\dfrac{1}{2\zeta(3)}=0.415\cdots$,其中 $\zeta(3)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$,$b=\dfrac{1}{6}=0.166\cdots$.,见[301]1998,218:607 - 610.

注 作者认为,利用 Euler 求和公式,可进一步导出

$$S(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{B_0}{1}-\frac{B_2}{x^2}+\frac{B_4}{x^4}-\frac{B_6}{x^6}+\frac{B_8}{x^8}\right)+0\left(\frac{1}{x^{12}}\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{6x^2}-\frac{1}{30x^4}-\frac{1}{42x^6}-\frac{1}{30x^8}\right)+0\left(\frac{1}{x^{12}}\right).$$

式中 $B_0,B_2,B_4,\cdots$ 为 Bernoulli 数,事实上,1989 年 Russell,D.C.就证明:

$$S(x)=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{B_1}{x^2}-\cdots-\frac{B_n}{x^{2n}}+\frac{(-1)^n}{x^{2n}}\int_0^{\infty}f^{(2n+1)}(t)\cos tx\,\mathrm{d}t\right).$$

若令 $S(\alpha,\beta)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{\alpha}}{(n^2+x)^{\beta}}$,式中 $0\leqslant\alpha<2\beta-1$,则

$$S(1,2\beta-1)\leqslant(\beta-1)[S(1,\beta)]^2.$$

特别地,$\beta=2$ 时,得到 **Alzer-Brenner** 不等式:

$$S(1,3)\leqslant[S(1,2)]^2$$

(Ruehr,O,G.等,Chapman Hall/CRC Res.Notes Math.2000,418:286 - 291)

4. **Favard 不等式**:

$K_r=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$ 称为 Favard 常数.

K_r 关于偶数指标严格递增,关于奇数指标严格递减:

$$1=K_0<K_2<K_4<\cdots<\frac{4}{\pi}<\cdots<K_3<K_1=\frac{\pi}{2}.$$

证明见[61]P.52.

5. [MCU].设 $a>0$,则

$$e^a<\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a+k}{n}\right)^n<e^{a+1}.$$

证　令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a+k}{n}\right)^n$,则

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{a-k}{n}\right)^n\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\exp(a-k)<\sum_{k=0}^{\infty}\exp(a-k)=\frac{e^{a+1}}{e-1}.$$

从而　$\limsup_{n\to\infty}S_n\leqslant\frac{e^{a+1}}{e-1}$.另一方面,对于固定的 m 及 $n>m$,有

$$S_n\geqslant\sum_{k=0}^{m}\left(1+\frac{a-k}{n}\right)^n,\text{从而}\quad\liminf_{n\to\infty}S_n\geqslant\sum_{k=0}^{m}\exp(a-k).$$

由 m 的任意性,得 $\liminf_{n\to\infty}S_n\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\exp(a-k)=\frac{e^{a+1}}{e-1}$.所以　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{e^{a+1}}{e-1}$,再注意到 $1<\frac{e}{e-1}<e$.得出 $e^a<\lim_{n\to\infty}S_n<e^{a+1}$.(见[66]P.215－216)

6.　设 $2x$ 为正整数,则

$$(2\sqrt{e}-3)\frac{x^{2x}}{(2x)!}\leqslant\sum_{k=2x+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\leqslant\frac{x^{2x}}{(2x)!}.$$

7.　**Szasz 不等式**:设 $x>0,r>0$,则

$$\sum_{|k-x|\geqslant r}\frac{x^k}{k!}\leqslant\frac{x}{r}e^x.$$

8.　(1)　设 $x\geqslant\frac{1}{2}$,则 $c_1f(x)\leqslant e^{-x}\sum_{k\geqslant 2x}\frac{x^k}{k!}\leqslant c_2f(x)$,

式中 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{e}{4}\right)^x,c_1=\frac{1}{2}(2\sqrt{e}-3),c_2=\sqrt{\frac{e}{4\pi}}$.

(2)　设 $\alpha>0,x>0,g_n(x)=(2x+1)/n$,则当 n 充分大时,成立

$$\sum_{k>2x}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{\alpha k}{n}}e^{-x}\frac{x^k}{k!}\leqslant\frac{3}{2}[g_n(x)]^{\alpha g_n(x)}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left(\frac{e}{4}\right)^x.$$

见[327]1984,40:226－241.

9.　设 $p\geqslant1,\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p<\infty$,则

$$\int_0^{\infty}e^{-px}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_nx^n}{n!}\right|^p\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p.$$

当 $p>1$ 时,仅当 $\forall a_k=0,(k=0,1,2,\cdots)$ 时等号成立.(见[4]P.495)

10.　**华罗庚不等式**:设 $p>0$,则存在与 p 有关的正常数 c,使得

$$\frac{n\pi^2}{6p^2}-c\sqrt{n}<\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}m\exp\left(\frac{-pmk}{\sqrt{n}}\right)<\frac{n\pi^2}{6p^2}.$$

([76]P.217－218).我们问:c 的最佳值是多少?

11.　设 $x>0,0<p\leqslant2$,则

$$\sum_{k=0}^{\infty}|x-k|^p\left(\frac{x^k}{k!}\right)\leqslant e^x\cdot x^{p/2}.$$

12.　当 $x\geqslant1$ 时,$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\geqslant(\ln2)^x$,当 $0<x\leqslant1$ 时不等号反向.

13. $\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}[1-(1-\frac{1}{2^k})^n] \leqslant (2+\frac{3}{\ln 2})\ln n$.

提示:设 $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k$. $S=\sum_{k=1}^{\infty}[1-(1-\frac{1}{2^k})^n]$.

则 $S=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}f_n(2^{-k})$; $\frac{1}{2}[S-\frac{1}{2}f_n(\frac{1}{2})] \leqslant \int_0^1 f_n \leqslant S$.

14. 设 $a_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{1/2}}{k^2} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

提示:用 Cauchy 不等式: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^{1/2}}{k^2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right)^{1/2}=\frac{\pi^2}{3\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}<\sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

15. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\operatorname{arctg}(k^2+k+1)}{k^2+k}\right)^{1/3}<\frac{(3\pi)^{1/3}}{2}\approx 1.0562$.

提示:两次用 Hölder 不等式.

16. $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2+kx+1}<\frac{\pi}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2n+x}{\sqrt{4-x^2}}\right)$. $(0<x<2)$.

提示:令 $f(t)=\frac{1}{t^2+tx+1}$,利用 $\sum_{k=n+1}^{\infty}f(k)<\int_n^{\infty}f$.

17. 设 $a>0, g(a)=(a^2+3a^4+a^6)e^{a^2}$,则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na^n}{\sqrt{(n-1)!(n^2+1)}} \leqslant \left(\frac{\pi}{2}g(a)\right)^{1/2}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{na^n}{(n+\sqrt{n^2+1})\sqrt{(n-1)!}} \leqslant \left(\frac{2}{3}g(a)\right)^{1/2}$.

提示:利用 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n=(x+3x^2+x^3)e^x$.

18. 设 a,b,c 为正数,x 为任意实数,则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\log^+\left(\frac{a}{b^2+(ck+x)^2}\right) \leqslant \frac{4\sqrt{a}}{c}+\log^+\left(\frac{a}{b^2}\right).$$

证 若 $a \leqslant b^2$,则不等式左端为零,右端为正,所以不等式成立,下面设 $a>b^2$,因为不等式左端的和有一项在 $k=-\frac{x}{c}$ 时有惟一的极大值,所以,

$$左端 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\log\left(\frac{a}{b^2+(ct+x)^2}\right)dt+\log\left(\frac{a}{b^2}\right)=$$

$$=\frac{4b}{c}\left\{\sqrt{\frac{a}{b^2}-1}-\operatorname{arctg}\left[\left(\frac{a}{b^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}+\log\left(\frac{a}{b^2}\right) \leqslant \frac{4\sqrt{a}}{c}+\log\left(\frac{a}{b^2}\right).$$

19. **交错级数不等式**: 我们熟知, 当递减的正数列 $a_n \to 0(n\to\infty)$ 时, $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ 收敛,且它的和 S 与部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ 的差满足不等式

$$|S-S_n| \leqslant a_{n+1}. \tag{2.3}$$

若进一步假设 $\{a_n-a_{n+1}\}$ 也递减,则上式可改进为

$$|S - T_n| \leqslant (a_n - a_{n+1})/2. \tag{2.4}$$

式中 $T_n = S_{n-1} - (-1)^n a_n/2$. 例如 $S = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{\ln(k+1)}$, 取 $n = 10$, 用(2.3)式得 $|S - S_{10}| < \frac{1}{\ln 2} \approx 0.4$; 而用(2.4)式得 $|S - T_{10}| < (a_{10} - a_{11})/2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 11} - \frac{1}{\ln 12}\right) \approx 0.0073$.

20. [MCM]. 对于给定的数列 $\{a_n\}$, 按如下方式定义一个新的数列 $\{b_n\}$:

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 b_1 - 1; b_{n+2} = a_{n+2}b_{n+1} - b_n, n = 1,2,\cdots,$$

则当 $a_n \geqslant 2$ 时, $\{b_n\}$ 严格递增, 而当 $a_n \geqslant 3$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}(1/b_n) < 2/3$.(见[345]1991,1:35.)

21. 设 $\lambda > 0$, 正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ 收敛, 且 $\lambda x_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k, n \geqslant 0$, 则当 $0 < p < 1$ 时, 成立

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^p \leqslant [(\lambda+1)^p - \lambda^p]^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k\right)^p, \text{仅当 } x_k = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^k \text{ 时等号成立.}$$

推论 设 $\{p_k : k \geqslant 0\}$ 为概率分布, 使得 $p_k > 0, k \geqslant 0$,

$$\lambda = \sup_{n \geqslant 0}\left\{\frac{1}{p_n}\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k\right\} < \infty, \text{则}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} p_k \log p_k \leqslant (\lambda+1)\log(\lambda+1) - \lambda\log\lambda,$$

仅当 $p_k = \frac{\lambda^k}{(\lambda+1)^{k+1}} (k \geqslant 0)$ 时等号成立.

(Allouche, J. P., 等, Tokyo J. Math. 1988, 11(2): 323 – 328)

22. [MCU]. 设 $a_k > 0, S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, 则

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n} \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{S_n} \leqslant 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$.

(见[305]1982, 89: 452 – 453.)

23. **超加性不等式:** 设 $p \geqslant 2, x, y > 0$, 则

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^p}\right)^{-1} + \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(y+k)^p}\right)^{-1} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+y+k)^p}.$$

提示: 利用 $f(r,s) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)}x^{r-1}(1-x)^{s-1}$, 当 $r, s > 0, 0 < x < 1$ 时是严格对数凹性的. (Trimble, S. Y., [385]1989, 20(5): 1255 – 1259)

24. 设 f 是 $[1,\infty)$ 上正的递减函数, $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$, 则

(1) $\int_{n+1}^{\infty} f < \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) < f(n+1) + \int_{n+1}^{\infty} f$.

(2) 若 $\forall a_k > 0, \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k} = 1$, 则 $\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f(na_k)\right] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

25. 设 $0 < p < 1, 1/p + 1/q = 1, [x]$ 为 x 的整数部分,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}[np]^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty}[nq]^{-2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}.$$

仅当 p 为无理数时等号成立.

26. 设 f 是 $[1,\infty)$ 上正的递增函数, $k, m \in N$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{m}{n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{k+m}{n}\right).$$

(见[1]P.333.)

27. 设 $0 < x < \pi/2$,则

(1) $\prod_{k=1}^{\infty}|1-(\cos x)^k e^{ikx}| < 1$; (2) $\prod_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1+(\cos x)^k e^{ikx}}{1-(\cos x)^k e^{ikx}}\right| < 1$.

由 Jordan, W. B. 给出的证明见 SIAN Review, 1979, 121(1): 140 - 141.

28. (1) 设 $x > 1$,令 $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right\}$,

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\ln\ln(x+n) - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+k)\ln(x+k)}\right\}.$$

则对充分大的 x,成立 $g(x) > \ln\varphi(x)$. 证明见[305]1987, 94(1): 196 - 197.

(2) 设 $x > 0, g(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$,则

$$0 < \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) < \frac{1}{12x}.$$

提示:利用 $0 < g(x) < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$.

29. 设 $a_k > 0, k = 1, 2, \cdots$,则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n\right)^{1/2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k\right)^{1/2}.$$

它可看作三角不等式的推广,见[67]P.7.65.

30. 设 $\{a_n\}$ 是有界的正数列, $p > 0$,则

$$\frac{1}{a_1^p} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1 a_2\cdots a_n}{a_{n+1}^p} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{p}{p+1}\right)^{n-p}.$$

证明见[305]1987, 94(7): 684.

31. 设 $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sigma_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$,若 $p > 1$,则当 $c > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n^p}{n^c} \leqslant K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(na_n)^p}{n^c}$.

当 $c < 1$ 时,上式中 S_n 换成 σ_n. 当 $0 < p < 1$ 时,不等号反向.

(见[1]P.287 - 288 定理 346.)我们问: $K = K(p, c)$ 的最佳值是什么?

32. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项收敛级数, $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k, 0 < p < 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p} < c_p\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^{1-p}. \tag{2.5}$$

式中 c_p 的最佳值为 $c_p=\dfrac{1}{1-p}$.

证 由第三章 N.8. Bernoulli 不等式,有

$$1-\frac{r_{n+1}}{r_n}<\frac{1}{1-p}\left[1-\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^{p-1}\right].$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)r_n^{1-p}<\frac{1}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}(r_n^{1-p}-r_{n+1}^{1-p})=\frac{1}{1-p}r_1^{1-p},$$ 此即(2.5)式.

为证 $c_p=\dfrac{1}{1-p}$ 是最佳值,可取 $a_n=x^{n-1},0<x<1$,则 $r_n=\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. 于是

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n^p}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^{p-1}=\frac{1-x}{1-x^{1-p}}\to\frac{1}{1-p}\quad(x\to1-0).$$

(见[305]1986,93(4):303 - 304.)

33. 设$\{a_k\}$为实数列,令 $r_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k^2$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant\frac{2}{\sqrt3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_n}{n}\right)^{1/2}.$$

证 利用 Cauchy 不等式,有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n&=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}\Big(\sum_{k=1}^{n}k\Big)=2\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a_n}{n(n+1)}\right)\\&\leqslant2\sum_{k=1}^{\infty}k\Big(\sum_{n=k}^{\infty}a_n^2\Big)^{1/2}\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\sum_{n=k}^{\infty}\Big(\frac1n-\frac{1}{n+1}\Big)^2=\sum_{n=k}^{\infty}\left(\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^2}\right)^2\leqslant\sum_{n=k}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{dx}{x^4}=\int_k^{\infty}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3k^3}.$$

代入上式,得 $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant2\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot r_k^{1/2}\frac{1}{\sqrt3k^{3/2}}=\frac{2}{\sqrt3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r_k}{k}\right)^{1/2}.$$

34. **Knopp 不等式:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac1n\sum_{k=1}^{n}e^{a_k^{-1}}\right)^{-1}<2\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

见[354]1929,30:387 - 413.

35. **Carlson 不等式:** 设$\{a_k\}$是不全为零的非负数列. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(ka_k)^2<\infty$,则

(1) $$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Big)^4<\pi^2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}k^2a_k^2\Big).\tag{2.6}$$

常数 π^2 最佳是在下述意义下:存在序列$\{a_n\}$,使得不等式(2.6)的右边任意接近左边.(见 Ark. Mat. Astr. Fys. ,1934,25B(1):1 - 5)

(2) **Landau, E. 证明:** (2.6)式可改进为:

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\Big)^4<\pi^2\Big(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\Big)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k-\frac12\right)^2a_k^2\right).$$

(见[14]P.7).(3.5)式还有许多改进和推广,例如

(3)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < G(p,\lambda)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1-\lambda} a_n^p\right)^{\frac{1}{2p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1+\lambda} a_n^p\right)^{\frac{1}{2p}}$.

式中 $\lambda > 0, p > 1, \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-1+\lambda} a_n^p < \infty$,常数　$G(p,\lambda) = 2^{1/p}\left\{\dfrac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2p-1}\right)\right]^2}{2\lambda\Gamma\left(\frac{1}{p-1}\right)}\right\}^{1-\frac{1}{p}}$　是最佳的.(见 Gabriel,[317]1937,12:130 - 132)

(4)　设 $\{a_n\}$ 为实数列,$0 < p \leqslant 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1-p} a_n^2\right)^{1/4}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+p} a_n^2\right)^{1/4},$$

(杨国胜等.[388]1999,30(10):1031 - 1040.)

(5)　设 $g(x) = \dfrac{d}{dx}(\ln\Gamma(x))$ 是 $\Gamma(x)$ 的对数导数.c 为 Euler 常数.$p \geqslant 1, q \geqslant 0$, $0 < a_n \leqslant 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^q\left[\prod_{k=1}^{n} a_k^{k^p-(k-1)^p}\right]^{\frac{q+1}{n^p}} \leqslant e^{g(p)+c+\frac{1}{p}}\sum_{n=1}^{\infty} n^q a_n.$$

(Alzer,H.,[389]1996,32(3 - 4):361 - 366)

注　(2.6)式及其积分形式在 20 世纪 90 年代之前的改进和推广,系统总结在[21]P.259 - 274.

(6)　2002 年,匡继昌 —Debnath. L. 证明下述更一般的结果:

设 $S_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a_n^p, S_\beta = \sum_{n=1}^{\infty} n^\beta a_n^p, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 0 < \beta < p - 1 < \alpha, a_n \geqslant 0, 0 < S_\alpha$, $S_\beta < \infty$,则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p < 2\left\{\frac{S_\alpha^{\lambda_\alpha}}{(\alpha-\beta)S_\beta^{\lambda_\beta}}B(\lambda_\beta,(-\lambda_\alpha)) - c(p,\alpha,\beta)\right\}^{p/q} \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a_n^p\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^\beta a_n^p\right),$$

式中 $\lambda_\alpha = \dfrac{p-\alpha q}{p(\alpha-\beta)}, \lambda_\beta = \dfrac{p-\beta q}{p(\alpha-\beta)}. c(p,\alpha,\beta) = \int_0^1 \dfrac{dx}{(S_\beta x^\alpha + S_\alpha x^\beta)^{q/p}} - \dfrac{1}{(S_\alpha + S_\beta)^{q/p}} > 0$. $B(u,v)$ 为 Beta 函数.特别,当 $p = q = \alpha = 2, \beta = 0$ 时,上式归结为

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^4 < (\pi - 2c)^2\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2\right),$$

式中 $c = G(s) = \operatorname{arctg} S - \dfrac{S}{1+S^2} > 0, S = \left(\dfrac{S_0}{S_2}\right)^{1/2}. S_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$,相应的积分类似见 13 章 N.5.

(见[301])2002,267(1):395 - 399)

36.(1)　**Daroczy 不等式**:设 $a_k > 0, 0 < p < 1$,令 $M = \sup_n\left(\dfrac{1}{a_n}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right) < \infty$,则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)^p \geqslant [(M+1)^P - M^p]\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p + p[M^{p-1} - (M+1)^{p-1}]\sum_{k=1}^{\infty}\left[Ma_k - \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j\right]a_k^{p-1},$$

仅当 $a_n = \left(\dfrac{M}{M+1}\right)^{n-1} a_1$　$(\forall n)$ 时等号成立.见[391]1997,75(1 - 2):27 - 30.

(2) **HLP 不等式(Hardy – Littlewood – Polya 不等式)**:设$\{a_k\}$是递减数列,$p>1$,则

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n\right)^p \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}a_n^p[n^p-(n-1)^p].$$

若$0<p<1$,则不等号反向.

Cvetan J. 等作了推广并用于离散概率分布的熵上,见 Glas. Mat. Ser. Ⅲ. 1997, 32(52)(2):201 – 206.

(3) **Copson 不等式**:设$\{a_n\}$为实数列,$\Delta a_n=a_{n+1}-a_n$,$\Delta^2a_n=\Delta(\Delta a_n)$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^2<\infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\Delta^2a_n)^2<\infty$,则

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\Delta a_n)^2\right)^2\leqslant 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\right)\left(\sum(\Delta^2a_n)^2\right).$$

式中 4 为最佳常数,仅当$\forall a_n=0$时等号成立.

Brown, B. M. 等将它推广为以下形式:

$$\left\{\sum_{n=-1}^{\infty}p_n\mid\Delta x_n\mid^2+\sum_{n=0}^{\infty}q_n\mid x_n\mid^2\right\}^2\leqslant K\sum_{n=-1}^{\infty}w_n\mid x_n\mid^2\sum_{n=0}^{\infty}w_n\left|\frac{Mx_n}{w_n}\right|^2,$$

式中$Mx_n=-\Delta(P_{n-1}\Delta x_{n-1})+q_nx_n$,$w_n>0$,$n=0,1,\cdots$

([392]1992,121(1 – 2):169 – 183)

37. **Hardy 不等式**:设$a_k\geqslant0$,且不全为零,令$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,$B_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}a_k$,$p>1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^P<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p. \tag{2.7}$$

式中常数$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$是最佳的,见[1]P. 270 定理 326.

该定理已有许多不同的证明,改进和推广,详见[1]P270 – 274 和[21]P143 – 185,下面仅介绍若干基本的结果.

(1) 设$0<p<1$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p<\infty$,则

$$\left(1+\frac{1}{1-p}\right)B_1^p+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p>\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p, \tag{2.8}$$

除非$\forall a_k=0$.([1]P. 283 定理 338.)

(2) **Copson 不等式**:设$p>1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n^p<p^p\sum\limits_{n=1}^{\infty}(na_n)^p$, (2.9)

除非$\forall a_k=0$,当$0<p<1$时,不等号反向,p^p为最佳常数.([1]P227,定理 331 和 344.). 由此推出,当$0<p<1$时,

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p>p^p\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^p$.([1]P287,定理 345).

(3) 设$0<p<1$,$1\leqslant k<\infty$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p<\frac{\pi p}{\sin(\pi p)}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sup_{k\geqslant n}a_k^p\right),$$

除非 $\forall a_k = 0$.(Grahame,B.[320],1988,39(156):385 - 400).

(4) 设 $a_1 > 0$,$\{a_k\}$ 是递减数列,$0 < p < 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{B_n}{n}\right)^p < \frac{\pi p}{\sin(\pi p)}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,$$

除非 $\forall a_k = 0$.(Bergh,J.,[354]1989,202(1):147 - 149).

(5) 设 $\frac{7}{6} \leqslant p \leqslant 2, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < q^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{15}{196}\cdot\frac{1}{n^{1/q} + 3436}\right)a_n^p.$$

(Huang Qi Liang,MR2001h:20031).

(6) 2000 年,文家金、张日新证明:设 $a_n \geqslant 0, 0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty, p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < q^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{C_p}{2n^{1/q}}\right)a_n^p, \tag{2.10}$$

式中 $C_p = \begin{cases} 1 - (1/q)^{p-1}, & p \geqslant 2 \\ 1/q, & 1 < p \leqslant 2, \end{cases}$

作者们先证明了以下引理 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\omega(n) a_n^p,$$

式中 $\omega(n) = n^{1/q}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^p}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^{1/p}}\right)^{p-1} = q^p\left(1 - \frac{C_p(n)}{n^{1/q}}\right)$.

作者们猜想 $\inf\limits_{n}\{C_p(n)\} = C_p(1) = 1 - q^p\omega(1)$.(见[344]2002,32(3):476-482)

(7) $p = 2$ 时,杨必成,朱匀华证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 < 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3\sqrt{n} + 5}\right)a_n^2.$$

(见"中山大学学报"1998,37(1):41 - 44)

(8) 2001 年 Chen C.P. 等考虑了 Hardy 不等式的一般形式:设 $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^p$, $1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k\right|^p \leqslant \|A\|_p \sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p. \tag{2.11}$$

设 $A = (a_{n,k})_{n,k} \geqslant 0$ 是下三角矩阵,且 $0 \leqslant a_{n,k} \leqslant a_{n,k+1}, 0 \leqslant k < n$,则

$\sup\limits_{k\geqslant 0}[\inf\limits_{n\geqslant k}\{(n+1)a_{n,k}\}]q \leqslant \|A\|_p \leqslant (\sup\limits_{n\geqslant 0}\{\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\}]q$,特别,若 $(n+1)a_{n,k}$ 关于 $k\nearrow$,则

$$\|A\|_p = (\sup_{n\geqslant 0}\{(n+1)a_{n,n}\})q,$$

当 $a_{n,k} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & n \geqslant k, \\ 0, & n < k, \end{cases}$

则 $\|A\|_p = q^p$,这时(2.11)式归结为(2.7)式.

更一般情形及其他推论详见[301]2002,273:160 - 171.

(9)　**Leindler 不等式**:设 $q_k > 0, Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k, \sigma_n = \sum_{k=n}^{\infty} q_k$,则当 $p \geqslant 1$ 时,成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_n A_n^p \leqslant p^p \sum_{k=1}^{\infty} q_n^{1-p} a_n^p \sigma_n^p;\quad \sum_{k=1}^{\infty} q_n B_n^p \leqslant p^p \sum_{k=1}^{\infty} q_n^{1-p} a_n^p Q_n^p,$$

当 $0 < p \leqslant 1$ 时,不等号均反向,式中 p^p 为最佳常数.(见[369]1990,54:285 - 289)

(10)　**Bennet 不等式**:设 $a = \{a_n\} \in l^p, p > 1, a_n \geqslant 0, \|a\|_n = \min\{a_k^p : k \leqslant n\}$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^p \geqslant \zeta(p)\sum_{n=0}^{\infty}\|a\|_n;$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{n+k+1}\right)^p \geqslant \zeta(p)\sum_{n=0}^{\infty}\|a\| n$$

式中常数 $\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ 是最佳的,仅当 $\forall a_n = 0$ 时等号成立.

(见[323]1992,44(1):54 - 74)

(11)　设 $1 < p_n \leqslant q < \infty$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^{p_n} \leqslant C \max\left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{p_k}\right)^q, \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k^{p_k}\right)^{1/q}\right\}.$$

Johnson, J_R. P. D. [360],1993,60:157 - 163.该文还提出了三个未解决的问题.

38. **Carleman 不等式**:

设 $a_n \geqslant 0, n = 1,2,\cdots, \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leqslant e\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{2.12}$$

仅当所有 $a_n = 0$ 时等号成立,其中系数 e 不能再改进.

证 1　从 Hardy 不等式,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^{1/p}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

令 $p \to \infty$,并利用几何—算术平均不等式 $G_n(a) \leqslant A_n(a)$　以及　$\lim\limits_{p\to\infty}\left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^p = e$,即可得证.

证 2　$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n}$$

$$< e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = e\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{n}{k(k+1)}\right) = e\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

系数 e 不能再改善,这只要考虑

$$a_n = \begin{cases}\frac{1}{n}, & (n \leqslant N)\\ 0, & (n > N)\end{cases},\quad 则\quad \sum_n a_n \sim \ln N.$$

又由 Stirling 公式：$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}\sim\dfrac{e}{n}$. 于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}\sim e\ln N$.

注 Carleman 不等式的有限和形式见第 3 章 N.111. 积分形式见第 13 章 N.4. 该不等式已有许多改进和推广，例如：

(1) 设 $a_n>0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$，令 $M_n=\max\{(ka_k)^{1/2}:1\leqslant k\leqslant n\}$，$m_n=\min\{(ka_k)^{1/2}:1\leqslant k\leqslant n\}$，则

$$\frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(M_n-m_n)^2}{n(n+1)}<\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

(Alzer, H., [327], 1998, 95: 497 - 499)

(2) 从(2.10)式令 $p\to\infty$，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}<e\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1-\frac{1}{e}}{2n}\right]a_n.$$

(3) 从第 3 章 N.111. 式，取 $\forall q_k=1$，并令 $n\to\infty$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}<\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{(n+1)^k}\right]a_n,$$

式中 $b_1=\dfrac{1}{2},b_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{n+2}-\sum\limits_{n=1}^{n}\dfrac{b_k}{n+2-k}\right)$. (2.13)

它是杨必成—Debnath, L. 的结果：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{1/n}<e\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{2(n+1)}\right]a_n$$

(见[301]1998, 223: 347-353) 等一系列结果的改进.

(4) 设$\{a_n\}$是正的递减数列，$x_n\geqslant0,p>0,\alpha\geqslant1$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}a_n\left[\prod_{k=1}^{n}x_x^{k^p-(k-1)^p}\right]^{\frac{1}{n^p}}\leqslant e^{\alpha/p}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha-1}a_nx_n,$$

若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}=\infty$，则 $e^{\alpha/p}$ 是最佳常数.

(Russell, L. E. Inequalities (Birminghan). 1987, 135 - 141, MR92i: 26016).

(5) 设 f,g 是(0,1)上正的可积函数，$\{\alpha_n\}$是严格递增数列，$\alpha_0=0$，令 $\beta_{m,n}=\alpha_n/\alpha_m,\omega_{m,n}=\int_{\beta_{m,n-1}}^{\beta_{m,n}}f(t)\mathrm{d}t,\lambda_n>0$，若 $\sum\limits_{m=n}^{\infty}\left(\dfrac{\lambda_m}{\lambda_n}\right)\int_{\beta_{m,n-1}}^{\beta_{m,n}}\dfrac{f(t)}{g(t)}\mathrm{d}t\leqslant c\int_0^1f(t)\mathrm{d}t$，则

$$\sum_{m=n}^{\infty}\lambda_mG_w(x_m)\leqslant cG_f[g(1)]\sum_{m=n}^{\infty}\lambda_mx_m,$$

式中 $x_n\geqslant0,G_w(x_m)=\exp\left(\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega_{m,n}\ln x_n}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega_{m,n}}\right)$；$G_f[g(1)]=\exp\left(\dfrac{\int_0^1f(t)\ln g(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1f(t)\mathrm{d}t}\right)$.

(文献与(4)同.)

39. **Van der corput 不等式**:设 $a_n \geqslant 0, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{1/k}\right)^{1/S_n} \leqslant e^{1+c}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_n.$$

式中 c 为 Euler 常数,2001 年,胡克改进为:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{1/k}\right)^{1/S_n} \leqslant e^{1+c}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{\ln n}{4n}\right)a_n.$$

见[340]2003,23(1):126 − 128.

40. **加权 Hardy 不等式**:设 $a_k \geqslant 0, q_k > 0, Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k, \sigma_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} q_k,, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k a_k$, $p > 1$,则

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} q_n\left(\frac{S_n}{Q_n}\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} q_n a_n^p, \tag{2.14}$$

仅当 $\forall a_n = 0$ 时等号成立.

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} q_n\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} \leqslant e\sum_{n=1}^{\infty} q_n a_n, \tag{2.15}$$

仅当 $\forall a_n = 0$ 时等号成立,特别 $\forall q_n = 1$ 时,得到 **Carleman 不等式**.

见[1]P278,定理 332;P288,定理 349.

(3) 1998 年,杨必成在附加条件 $0 < q_{n+1} \leqslant q_n$ 下,将(2.15)式改进为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} \leqslant e\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{q_n}{2(Q_n+q_n)}\right] q_n a_n.$$

见[301]1999,234:717 − 722.

(4) 从第 3 章 N.111.式令 $n \to \infty$ 然后将原式中 k 换成 n,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} \leqslant e\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_n^k b_k}{(Q_n+q_n)^k}\right] q_n a_n,$$

式中$\{b_n\}$由本节(2.13)式定义.

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} q_n\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n^2}{Q_n}\left(\prod_{k=1}^{n} a_k^{q_k}\right)^{\frac{1}{Q_n}} < e\sum_{n=1}^{\infty} q_n a_n.$$

特别地,$\forall q_k = 1$ 时 $Q_n = n$,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} < e\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(Alzer. H. ,Port. Math. 1993,50(3):331 − 334).

注 设 $f(k_1, k_2)$ 为二元非负数列,定义二维离散 Hardy 算子 T 为:

$$(Tf)(n_1, n_2) = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} f(k_1, k_2).$$

2000 年,Rakotondratsimba, Y. 考虑了二维离散 Hardy 不等式:

$$\left\{\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}[(Tf)(n_1,n_2)]^q g(n_1,n_2)\right\}^{1/q} \leqslant C\left\{\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}[f(n_1,n_2)]^p g(n_1,n_2)\right\}^{1/p},$$

式中 $1 < p \leqslant q < \infty$，见[391]2000，86(3)：213 – 236.

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi(a_k)\right) < K(\varphi)\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$

特别，取 $\varphi(x) = x^p$，$(0 < p < 1)$，即得 Hardy 不等式，取 $\varphi(x) = \ln x$，即得 Carleman 不等式. 关于 φ 的条件的讨论见[354]1929，30：387 – 413. 或[1]P.292. 1995 年，Jozsef，N. 考虑了加权形式不等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n\varphi\left(\frac{a_n}{q_n}\sum_{k=n}^{\infty}q_k\right) \leqslant M\sum_{n=1}^{\infty} q_n\varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right),$$

见[369]1995，60(3 – 4)：571 – 579.

42. **Hilbert 不等式**：设 $a_n, b_n \geqslant 0$，$1 < p < \infty$，$1/p + 1/q = 1$，

$$\| a \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p\right)^{1/p},\ \| b \|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^q\right)^{1/q},\ 0 < \| a \|_p < \infty,\ 0 < \| b \|_q < \infty,$$

则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\| a \|_p \| b \|_q. \tag{2.16}$$

(1)　Hilbert 在他的积分方程课程中证明(2.16)式中 $p = 2$ 的情形，但没有考虑常数的精确性. 1908 年由 Weyl，H. 发表(2.16)式当 $p = 2$ 时的证明，1911 年 Schur 找到(2.16)式中 $p = 2$ 时的精确常数 $c = \pi$. 1925 年 Hardy 与 Riesz 证明了(2.16)式的积分类似(见第 13 章 N.2.)，此后，许多著名数学家如 Fejer(1921)，Framcis，Littlewood(1928)，Hardy(1920)，Hardy-Littlewood-Polya(1926)，Mulholland(1928，1931)，Owen(1930)，Polya 和 Szëgo，Schur(1911)，Wiener(1910) 等都作出过贡献. 为此，Hardy 等在[1] 中用了专门一章(第 9 章)讨论 Hilbert 不等式及其类似情形和各种推广. [21]第 5 章则总结了 20 世纪 90 年代为止的研究成果，引用了 59 篇文章. Hilbert 不等式的有限和形式见第 3 章 N157，积分形式见第 13 章 N.2，下面仅介绍无穷级数形式的 Hilbert 不等式的新的研究成果.

(2)　1990 年，徐利治教授通过引入权系数 $\omega(r,n)$ 证明(2.16) 式中的系数仍可减少，即可将(2.16) 式写成如下形式：

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega(q,n)a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\omega(p,n)b_n^q\right)^{1/q}, \tag{2.17}$$

式中 $\omega(r,n) = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} - \varphi(r,n)$，$\varphi(r,n) > 0$. $r = p$ 或 q，经过不断改进，杨必成、高明哲证明了 $\varphi(r,n) = \frac{1-c}{n^{1-1/r}}$，式中 c 为 Euler 常数. 证明的关键是证明本节 N2.

(见[339]1990，10(4)：500；[342]1991，1：75 – 77；[335]1997，26(2)：156 – 164；[308]1998，126(3)：751 – 759 等). 杨必成——Debnath，L. 证明

$$\varphi(q,n) = \frac{1}{2n^{1/p} + n^{-1/q}}.$$

(见[326]1998，21(2)：403 – 408).

(3)　高明哲通过对内积空间中 Schwarz 不等式的改进(见第 1 章 §2 三 .N.5.). 证明

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} < \pi\sqrt{1-r}\,\|a\|_2\|b\|_2,$$

式中 $S(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}, r=\frac{1}{\pi^2}\left[\left(\frac{s(a)}{\|a\|_2}\right)^2+\left(\frac{s(b)}{\|b\|_2}\right)^2\right]$.

见[390]1990,18(4):1117－1122.

(4)　设 $a_n,b_n\geqslant 0$, $\|a\|_2=\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right)^{1/2}$, $\|ab\|_1=\sum_{k=1}^{\infty}a_k b_k$,则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n-1}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{2}}\{(\|a\|_2\|b\|_2)^2+(\|ab\|_1)^2\}^{1/2}.$$

(Zhang Kewei,[301]2002,271(1)L288－296)

(5)　2001 年胡克证明:设 $\lambda\notin N$,则

$$\left|\sum_{\substack{m,n=1\\ m-n\neq\lambda}}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m-n-\lambda}\right|^2+\left|\sum_{\substack{m,n=1\\ m-n\neq\lambda}}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n-\lambda}\right|^2\leqslant\left(\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\right)^2\|a\|_2^2\|b\|_2^2-$$
$$-\|b\|_2^2\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m-\lambda}\right|^2.$$

[356]2002,22(2):1－6.

(6)　洪勇证明:设 $a_n,b_n\geqslant 0,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p>1,\alpha\geqslant 1,1-\frac{1}{\alpha r}<\beta\leqslant 1,r=p,q$,则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{(m^\alpha+n^\alpha)^\beta}\leqslant\left[\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(q,\alpha,\beta)a_n^p\right]^{1/p}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(q,\alpha,\beta)a_n^q\right]^{1/q},$$

式中 $\omega_n(r,\alpha,\beta)=n^{\alpha(1-\beta)}\dfrac{\Gamma(1-\frac{1}{\alpha r})\Gamma(\beta+\frac{1}{\alpha r}-1)}{\Gamma(\beta)}-\dfrac{1/8}{n^{\alpha\beta-1/r}}$.

见[344]2002,32(5):849－854.

(7)　1936 年,Ingham 证明:设 $a_n\geqslant 0$, $\|a\|_2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^2\right)^{1/2}$,$0<\|a\|_2<\infty,\lambda>0$,则

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n+\lambda}\leqslant M(\lambda)\|a\|_2^2.$$

式中 $0<\lambda\leqslant\frac{1}{2}$ 时 $M(\lambda)=\frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$,$\lambda>\frac{1}{2}$ 时 $M(\lambda)=\pi$,见[317]1936,11:237－240.

(8)　设 X 为复内积空间,$a_n,b_n\in X$,λ 为实数.

$$\|a\|_2=\left(\sum_{k\in Z}\|a_k\|^2\right)^{1/2}<\infty,\ \|b\|_2=\left(\sum_{k\in Z}\|a_k\|^2\right)^{1/2}<\infty.$$

(a_n,b_m) 为 a_n,b_m 的内积,则

$$\left|\sum_{m,n\in Z}\frac{(a_m,b_n)}{m-n+\lambda}\right|\leqslant\frac{\pi}{|\sin(\pi\lambda)|}\|a\|_2\|b\|_2.$$

(Redheffer,R. M. 等,Mh. Math. 1983,95:137－148)

(9)　设 $a_n,b_n\geqslant 0$,则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{\ln(m+n)}\leqslant c\left(\sum_{n=1}^{\infty}na_n^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nb_n^2\right)^{1/2},$$

式中 $0<c<4e$，上式右边两个级数收敛．见[21]P201．我们问：c 的最佳值是多少？

（10） 2000 年匡继昌——Debnath，L．在研究了 Hilbert 不等式的各种参数推广的本质特征后，考虑了一般形式的二重级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}K(m+\lambda,n+\lambda)a_m b_n$ 的估计：

定理 1　设 $a_n,b_n\geqslant 0,1<p<\infty,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}\min\{p,q\},0<\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)^{1-t}a_n^p<\infty,0<\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)^{1-t}b_n^p<\infty,K(x,y)$ 为 $(-t)$ 阶非负齐次函数，$t>0$，$K(1,y)$ 在 $(0,\infty)$ 上有 4 阶连续导数，且 $(-1)^n K^{(n)}(1,y)\geqslant 0,n=0,1,2,3,4,K^{(m)}(1,y)y^{-\frac{2\lambda}{r}}\to 0,y\to\infty,m=0,1,,I(r,\lambda)=\int_0^{\infty}K(1,u)u^{-\frac{2\lambda}{r}}du<\infty,r=p,q$，则

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}K(m+\lambda,n+\lambda)a_m b_n<\left\{\sum_{m=0}^{\infty}[I(q,\lambda)-\varphi(q,m,t,\lambda)](m+\lambda)^{1-t}a_m^p\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}[I(p,\lambda)-\varphi(p,n,t,\lambda)](n+\lambda)^{1-t}b_n^q\right\}^{1/q},$$

式中 $\varphi(r,n,t,\lambda)=\left(\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)^{1-\frac{2\lambda}{r}}\times$

$$\times\left\{K\left(1,\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)\left[\frac{1}{1-\frac{2\lambda}{r}}-\left(\frac{1}{2\lambda}\left(1+\frac{1}{3\lambda}\right)\right)\right]-\frac{1}{24\lambda(n+\lambda)}K'\left(1,\frac{\lambda}{n+\lambda}\right)\right\}>0.$$

$r=p,q$．当 $0<\lambda<1/2$ 时，也得到了相应的结果，特别地，有

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_m b_n}{n+n+1}<\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\frac{1}{2(2m+1)^{1/p}}\left(p+\frac{1}{3p}-\frac{4}{3}\right)\right]a_m^p\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}-\frac{1}{2(2n+1)^{1/q}}\left(q+\frac{1}{3q}-\frac{4}{3}\right)\right]b_n^q\right\}^{1/q}.$$

证明和有关应用详见[301]2000，245：248－265．

（11） 2003 年匡继昌—Debnath，L．研究了 Hilbert 不等式及其反向不等式的一般形式：设 $a_n,b_n\geqslant 0,\alpha_n,\beta_n>0,1/p+1/q=1,N<\infty$ 或 $N=\infty$，令

$$f_N(x)=e^{-x}\sum_{m=0}^{N}a_m\frac{x^{\alpha_m-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha_m+1/2)}\cdot g_N(x)=e^{-x}\sum_{n=0}^{N}b_n\frac{x^{\beta_n-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\beta_n+1/2)}.$$

若 $1<p<\infty$，则

$$\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\frac{a_m b_n}{\alpha_m+\beta_n}\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|f_N\|_p\|g_N\|_q.$$

若 $0<p<1$，则不等号反向．

特别当 $\alpha_m=m+1/2,\beta_n=n+1/2$，得到

$$\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\frac{a_m b_n}{m+n+1}\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|f_N\|_p\|g_N\|_q\leqslant\frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|a\|_p\|b\|_q.$$

43. 设 $f \in L^2(0,1)$，$f(x) \neq 0$，$0 < x < 1$，$0 < \int_0^1 f^2 < \infty$，$a_n = \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x$ 称为 f 在 $(0,1)$ 中的矩，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \pi \int_0^1 f^2. \tag{2.18}$$

证明用 Hilbert 不等式，详见[1]P.267 - 268.

利用 Hilbert 不等式的改进，高明哲对(2.18)式改进为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2\right)^2 < \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\pi - \frac{\theta(n)}{\sqrt{2n+1}}\right)a_n^2\right\}\int_0^1 f^2.$$

式中 $\theta(n) > 0$，见[301]1997，212:316 - 323.

杨必成则进一步求出 $\theta(n) = \dfrac{1}{10(2n+1)}$，并进一步证明，当 $p \geqslant 2$ 时，成立

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p\right)^{\left(1+\frac{1}{p}\right)} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{p(p-1)}\right\}^{1/p}\int_0^1 f^2.$$

见[341]2000，16(3):279 - 286.

44. **Littlewood 不等式**：1967 年，Littlewood 提出，是否存在绝对非负常数 C_1, C_2，使得 $\forall a_n \geqslant 0$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 S_k\right) \leqslant C_1 \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^4 S_n^2); \tag{2.19}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n S_n^2\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^{3/2}\right) \leqslant C_2 \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 S_n^4). \tag{2.20}$$

式中 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，见[5]$I$(1967):151 - 162.

(1) 1987 年，Bennet, G. 证明：**定理 1** 设 $p, q, r \geqslant 1$，$a_n \geqslant 0$，则

$$\sum_{m=1}^{n} a_m^p S_m^q\left(\sum_{k=m}^{n} a_k^{1+\frac{p}{q}}\right)^r \leqslant \left(\frac{p(q+r)-q}{p}\right)^r \sum_{k=1}^{n}(a_k^p S_k^q)^{1+\frac{r}{q}}. \tag{2.21}$$

特别地，取 $p = 2$，$q = r = 1$，得到(2.19)式，其中 $C_1 = 3/2$；

取 $p = 1$，$q = r = 2$，得到(2.20)式，其中 $C_2 = 4$.

定理 2 设 $\{a_k\}$ 是非负递增数列，$p \geqslant 1$，$q, r > 0$，$d = \dfrac{p(q+r)-q}{p} \geqslant N$，则

$$\sum_{m=1}^{n} a_m^p S_m^q\left(\sum_{k=m}^{n} a_k^{1+\frac{p}{q}}\right)^r \leqslant \prod_{k=0}^{N-1}(d-k)^{r/N} \sum_{k=1}^{n}(a_k^p S_k^q)^{1+\frac{r}{q}}. \tag{2.22}$$

若 $N = 1$，则 $\{a_n\}$ 递增的条件可去掉.

定理 3 设 $p, q \geqslant 1$，$a_n \geqslant 0$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^p S_n^p)\sum_{k=n}^{\infty} a_k^r) \leqslant (2 - 1/p)^q q^q \sum_{n=1}^{\infty}(a_n S_n)^{2p}.\text{式中 } r = (1+p)/q.$$

作者猜测 $c(p,q) = [(2-1/p)q]^q$ 不是最佳常数.

见[308]1987，100(3):474 - 476；[320]1987，2:401 - 425.

(2) 1996 年，Alzer, H. 在附加条件 $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 下，证明

$$\sum_{m=1}^{n} a_m S_m^2 \left(\sum_{k=m}^{n} a_k^{3/2}\right)^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 S_k^4.$$

即将(2.20)中 $c_2 = 4$ 改进为 $c_2 = 2$,见[301]1996,199(2):403－408.

(3)　1998 年成礼智等将(2.22)式的 $r>0$ 缩小到 $0\leqslant r\leqslant 1$,$p\geqslant 1$ 扩大到 $p>0$,得到

定理 4　设 $\{a_n\}$ 是非负递增数列,$p,q>0$,$0\leqslant r\leqslant 1$,$p(q+r)\geqslant p+q$,则

$$\sum_{m=1}^{n} a_m^p S_m^q \left(\sum_{k=m}^{n} a_k^t\right)^r \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k^p S_k^q)^{1+\frac{r}{q}},\text{式中 } t = 1+\frac{p}{q}.$$

(4)　设 $p,q\geqslant 1$,$r>0$,$a_n\geqslant 0$,$r(p-1)\leqslant 2(q-1)$.

记 $\alpha = \dfrac{(p-1)(q+r)+p^2+1}{p+1}$,$\beta = \dfrac{2q+2r+p-1}{p+1}$,$\delta = \dfrac{q+r-1}{p+q+r}$,则

$$\sum_{m=1}^{n} a_m^p \sum_{k=1}^{m} a_k^q S_k^r \leqslant 2^\delta \sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha S_k^\beta.$$

特别取 $p=3$,$q=2$,$r=1$,得到

$$\sum_{m=1}^{n} a_m^3 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 S_k\right) \leqslant \sqrt[3]{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^4 S_k^2.$$

即将(2.19)式中 $c_1 = 3/2$ 改进为 $c_1 = \sqrt[3]{2}$. 见[344]1998,28(4):314－319.

(5)　广义 Littlewood 不等式:设 $\{x_{ki}\}(a_{ij})$ 为实矩阵,$|t_i|\leqslant 1$,$|s_j|\leqslant 1$,且 $\forall m\in N$,$\left|\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} t_i s_j\right| \leqslant M$;而 $\forall i\in N$,$x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{mi}, \cdots)\in l^2$,即

$$\|x_i\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_{ki}^2\right)^{1/2} < \infty,\quad \text{则}\quad \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_{ki} a_{ij}\right)^2\right]^{1/2} \leqslant CM\|x_i\|_2.$$

证明见[104]P180－181.

45.　**HB 型不等式(Hardy－Bennett 型不等式)**:设 $q=\{q_n\}$ 是正数列,令 $Q_n = \sum_{k=n}^{\infty} q_k$,$Q_1<\infty$,$p>0$,$c\geqslant 0$,定义两个序列空间:

$$q(p,c) = \{x=\{x_n\} : \|x\|_q < \infty\},\ Q(p,c) = \{x=\{x_n\} : \|x\|_Q < \infty\},$$

式中 $\|x\|_q^p = \sum_{n=1}^{\infty} q_n Q_n^{-c}\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^p$,此处 $\|x\|_q$ 表示 $\|x\|_{q(p,c)}$;

$$\|x\|_Q^p = \sup_n\left\{Q_n^{(p-1)(1-c)}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right\},\text{此处 } \|x\|_Q \text{ 表示 } \|x\|_{Q(p,c)}.$$

(1)　设 $p>0$,$0\leqslant c<1$,若 $x\in q(p,c)$,则 $x=\{x_n\}$ 存在因子分解:$x=yz$,式中 $y=\{y_n\}$,$z=\{z_n\}$,$x=yz$ 表示 $x_n = y_n z_n$,满足:$y\in l^p$,即 $\|y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} < \infty$,$z\in Q(q,c)$,其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,而且 $\inf\{\|y\|_p\cdot\|z\|_{Q(q,c)}\}\leqslant \|x\|_{q(p,c)}$. 此处下确界是对 x 的 所有满足上述条件的分解取的.

(2)　反之,设存在 $\beta>0$,使得

$$n^\beta \sum_{k=n}^{\infty} q_k Q_k^{-c} \leqslant m^\beta \sum_{k=m}^{\infty} q_k Q_k^{-c},\ 1\leqslant m\leqslant n.$$

且存在 $M>0$,使得 $\forall n\in N, n\geqslant 2$,成立

$$\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{q_{k-1}}{Q_k}\right)\leqslant Mn.$$

若 x 的因子分解满足(1),则 $x\in q(p,c)$,而且存在正常数 $c=c(q,p,c)$,使得

$$\| x \|_{q(p,c)}\leqslant c\inf\{\| y\|_p\cdot \| z\|_{Q(q,c)}\},$$

式中 $1/p+1/q=1$.若将上述 Q_n 换成 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} q_k$,也可得到类似的不等式.

(Leindler, L., [303]. 1998, 1(4): 517 - 526)

46. (1) **Bessel 不等式**:设 $A=\{e_k\}$ 是内积空间 X 中的标准正交系,则 $\forall x\in X$, $c_k=(x,e_k)$. $c=\{c_k\}\in l^2$ 且 $\| c\|_2=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\right)^{1/2}\leqslant \| x\|$.

证明可参看[118]P.201 - 202.

特别,当$\{e_k\}$ 为三角函数系时,a_n,b_n 为f 的 Fourier 级数,则 $\forall f\in L^2_{2\pi}$,成立

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2.$$

(2) 设 X 为内积空间,$x_1,\cdots,x_n\in X, c>0, \alpha_k$ 为复数,若

$$\left|\sum_{k,j=1}^{n}(x_k,x_j)x_k\overline{c_j}\right|\leqslant c\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2,$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{n}|(x,x_k)|^2\leqslant c\| x\|^2, \forall x\in X$.

(3) 设 X 为内积空间,$x_k,x,y\in X$,则成立 Schwarz 型不等式:

$$|\Gamma(x_1,\cdots,x_n)(x,y)|^2\leqslant\Gamma(x,x_1,\cdots,x_n)\cdot\Gamma(y,x_1,\cdots,x_n).$$

(2)(3) 见 Dragomir, S. S. 等. Mathematica, 1995, 37(60)(1 - 2): 93 - 102.

47. 设$\{\varphi_n(x)\}$ 为$[a,b]$上标准正交系. $|\varphi_n(x)|\leqslant M$($M$ 为常数),$f(x)$ 关于 $\{\varphi_n\}$ 的正交级数为$\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\varphi_k(x)$, $c=\{c_k\}$ 的 l^q 范数为 $\| c\|_q=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^q\right)^{1/q}$.

$$\| f\|_p=\left(\int_a^b|f|^p\right)^{1/p}.$$

(1) **Riesz 不等式**:设 $f\in L^p[a,b], 1<p\leqslant 2, 1/p+1/q=1$,则

$$\| c\|_q\leqslant M^{\frac{2-p}{p}}\| f\|_p;$$

反之,若 $c=\{c_k\}\in l^q, 1<q\leqslant 2$,则存在 $f\in L^p[a,b]$,使得

$$\| f\|_p\leqslant M^{\frac{2-q}{q}}\| c\|_q.$$

特别当$\{\varphi_n(x)\}$为三角函数系时,上述不等式称为**Hausdorff-Young不等式**:$c_k=\hat{f}(k)$表示 f 的 Fourier 系数,若 $f\in L^p_{2\pi}, 1<p\leqslant 2, 1/p+1/q=1$.

令 $\| f\|_p=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^p\right)^{1/p}$, $\|\hat{f}\|_q=\left(\sum\limits_{k\in Z}|\hat{f}(k)|^q\right)^{1/q}$.则 $\|\hat{f}\|_q\leqslant\| f\|_p$;

反之,若 $\hat{f}\in L^q_{2\pi}$,则存在 $f\in L^p_{2\pi}$,使得 $\hat{f}(k)=c_k$ 为f 的 Fourier 系数,且

$$\|f\|_p \leqslant \|\hat{f}\|_q.$$

(2) 设 $f \in L^p[a,b]$，$1 < p < 2$，则存在正常数 c，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \cdot k^{(1-\frac{2}{p})} \leqslant c\|f\|_p^2.$$

反之，设 $q \geqslant 2$，且序列 $c = \{c_k\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 k^{(1-\frac{2}{q})} = M < \infty.$$

则存在 $f \in L^q[a,b]$，使得 c_k 恰好是 f 关于 $\{\varphi_n\}$ 的 Fourier 系数，即 $c_k = c_k(f)$，而且

$$\|f\|_q^2 \leqslant M.$$

(Ilin, V. A., Mat. Inst. Steklova, 1997, 219: 211 – 219)

(3) **Paley 不等式**：设将 $\{|c_k|\}$ 按递减顺序重排得到的数列记为 $\{c_k^*\}$，若 $f \in L^p[a,b]$，$1 < p \leqslant 2$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n^*)^p n^{p-2} \leqslant c_p \int_a^b |f|^p$；当 $q \geqslant 2$ 时，若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(c_n^*)^q n^{q-2} < \infty$，则存在 $f \in L^q[a,b]$，使得

$$\int_a^b |f|^q \leqslant c_q \sum_{n=1}^{\infty}(c_n^*)^q n^{q-2}.$$

式中 c_p, c_q 分别是只与 p, q 有关的常数. 特别，当 $\{\varphi_n\}$ 为三角函数系时，上述不等式称为 **Hardly-Littlewood 不等式**. 见本章 §1 N.66(14)，[84]. Vol. 2: 193.

48. 设 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikx}$，$f \in L_{2\pi}$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|}{k+1} \leqslant \pi \int_0^{2\pi} |f|.$$

见[305]1984, 91(4): 263 – 264.

49. 设 $f(x) = \sum\limits_{k \in Z} c_k e^{ixk}$，若 f 为绝对连续函数，且导函数 $f' \in L_{2\pi}^2$，则

(1) $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \leqslant \|f\|_1 + \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\|f'\|_2$. 式中 $\|f'\|_2 = \left(\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'|^2\right)^{1/2}$；

(2) $\sum\limits_{k \in Z} |c_k| \leqslant |c_0| + \left(\dfrac{\pi}{6}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$，式中 $c_k = \hat{f}(k)$.

50. 设 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a^{-n\beta}\cos a^n x$，$-\pi \leqslant x \leqslant \pi$，$a > 1$，$0 < \beta < 1$，则对于 $t \geqslant 0$，有

$$|f(x + a^{-t}) - f(x - a^{-t})| \leqslant Aa^{(1-\beta)[t]-t} + Ba^{-\beta[t]},$$

式中 $[t]$ 为 t 的整数部分，A, B 为只依赖于 a, β 的常数.

提示：$f(x + a^{-t}) - f(x - a^{-t}) = -2\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{-n\beta}\sin a^{n-t} \cdot \sin a^n x$，

于是

$$|f(x + a^{-t})| - f(x - a^{-t})| \leqslant 2\sum_{n=1}^{[t]-1} a^{(1-\beta)n-t} + 2\sum_{n=[t]}^{\infty} a^{-n\beta}$$
$$\leqslant Aa^{(1-\beta)[t]-t} + Ba^{-\beta[t]},$$

式中 $A = 2(a^{1-\beta}-1)^{-1}, b = 2(1-a^{-\beta})^{-1}$(见[73]P509 - 511)

51. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx)/n^2, |x| \leqslant 2\pi$,则

$-\pi^2/12 \leqslant f(x) \leqslant \pi^2/6.$

提示:用 Fourier 级数理论证明 $f(x) = x^2/4 - |x|(\pi/2) + \pi^2/6$,然后求 f 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上的最大最小值.

52. 设 $0 < x < \pi, -\pi < t < \pi, |t| \neq x, t \neq 0$,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\cdot\frac{\sin[k-(1/2)]t}{2\sin(t/2)} > 0.$$

53. 设 $0 < x < \pi, 0 < t < \pi, t \neq x$,则

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}\cdot\frac{\cos(t/2)-\cos[k+(1/2)]t}{2\sin(t/2)} > 0.$$

54. 设 $\{a_n\}$ 是四次单调序列,即

$$\binom{k}{0}a_n - \binom{k}{1}a_{n+1} + \cdots + (-1)^k\binom{k}{k}a_{n+k} \geqslant 0.$$

$k = 1,2,3,4$.则对于 $0 < x < \pi$,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin kx \leqslant \frac{a_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}.\text{(N52 - 54 见[4]P.359 - 360)}$$

55. **Lyness-Moler 不等式:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\sin n\pi x}{n}\right)^{2m} \geqslant 0.$$

对于所有实数 x 及所有自然数 m 成立.见 SIAM Review 1967,9:250;1969,11:82 - 86,他可推广为

(1) 设 $0 < x_k < \pi, 1 \leqslant m \leqslant N$, $\sum_{n=1}^{m}\prod_{k=1}^{N}\frac{\sin nx_k}{n} > 0$;

(2) $0 < x_k < \pi, N \geqslant 3$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\prod_{k=1}^{N}\frac{\sin nx_k}{n}\right) > 0$, 见[383]1968,15:769.

56. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{4^n}$,则

(1) 当 $x > e$ 时,有 $|f(x)| < C_1\ln\ln x$,式中 $C_1 > 0$ 是与 x 无关的常数,可取 $C_1 = 2.1$.

(2) 存在序列 $\{x_n\}, 1 < x_n < x_{n+1}, x_n \to \infty$,及常数 $C_2 > 0$,使得

$$|f(x_n)| > C_2\ln\ln x_n, n = 1,2,\cdots.\text{ 可取 } C_2 = 0.47.$$

证 (1) 对于 $x > e$,令 $m = [\ln x], f(x) = \sum_{n\leqslant m}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{4^n} + \sum_{n>m}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{4^n} = S_1(x) + S_2(x)$, $S_1(x) < \sum_{n\leqslant m}\frac{1}{n} < 2\ln\ln x$, $S_2(x) < \sum_{n<m}\frac{x}{n4^n} < x\sum_{n>m}4^{-n} < C_3$.

从以上两式即可证得(1).

为证(2),只要取 $x_n = \frac{2\pi}{3}(4^n-1)$,则$\frac{x_n}{2\pi}$ 为整数,于是 .

$$f(x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{x_n}{4^k}=\Big(\sum_{k=1}^{n}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big)\frac{1}{k}\sin\frac{x_n}{4^k}=S_3+S_4,$$

再证明　$|S_3|>C_4\ln n$,　$|S_4|<(2\pi)/9$.　(见[77]P.25)

57.　设区间 D 包含 O 点,f 在 D 上有 $n-1$ 阶连续导数,且 $f^{(n)}$ 存在,设 $x\neq 0$,令

$$\theta_n(x)=\sup\left\{\theta:0<\theta\leqslant 1,\text{且 } f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right\}.$$

$\mathrm{L_n}(f)=\limsup\limits_{x\to 0}\theta_n(x)$,则

$$\mathrm{L_n}(f)\geqslant\frac{1}{ne^c}(1+o(1)).$$

式中 c 为 Euler 常数.(Ivanov,V.V.等,Sibirsk.Mat.Zh.1995,36(1):86－92).

58.　**E-M求和不等式(Euler-Maclaurin求和不等式)**:设 $f\in C^{2m}[a,\infty)$,f 为 $2m$ 阶凸函数(定义见第7章 §1),且 $f^{(2k-1)}(x)\to 0(x\to\infty)$,$k=\frac{1}{2},1,2,\cdots,m-1$,$F$ 为 f 的原函数,且 $F(x)\to 0,(x\to\infty)$,则当 m 为奇数时,成立

$$\sum_{k=0}^{\infty}f(x+k)\geqslant\frac{1}{2}f(x)-F(x)-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{B_{2k}}{(2k)!}f^{(2k-1)}(x);$$

当 m 为偶数时,不等号反向.式中 B_{2k} 为 Bernoulli 数(Pecaric,J.等,[368]1999,41(1):79－93).