§ 2 最佳逼近不等式

设(X,d)为距离空间,A为X的非空子集,对于$x \in X$,若存在$y_0 \in A$,使得

$$d(x,y_0) = \inf\{d(x,y): y \in A\}. \tag{2.1}$$

则称y_0是x在集A中的最佳逼近元,在赋范线性空间$(X, \|\cdot\|)$中,(2.1)式变成

$$\|x - y_0\| = \inf\{\|x - y\|: y \in A\}. \tag{2.2}$$

设$P_n(x)$与$T_n(x)$分别表示n阶代数多项式和n次三角多项式,若$f \in C[a,b]$,记

$$E_n(f) = \inf_{\{P_n\}}\{\|f - P_n\|_c\} = \|f - P_n^*\|_c; \tag{2.3}$$

若$f \in C_{2\pi}$,记

$$E_n^*(f) = \inf_{\{T_n\}}\{\|f - T_n\|_c\} = \|f - T_n^*\|_c; \tag{2.4}$$

若 $f \in L^p(E), 1 \leqslant p < \infty$,记

$$E_n(f)_p = \inf_{\{P_n\}}\{\|f - P_n\|_p\} = \|f - P_n^*\|_p; \tag{2.5}$$

若 $\in L^p_{2\pi}, 1 \leqslant p < \infty$,记

$$E_n(f)_p^* = \inf_{\{T_n\}}\{\|f - T_n\|_p\} = \|f - T_n^*\|_p. \tag{2.6}$$

$E_n(f), E_n^*(f), \cdots$,称为 f 的最佳逼近,$P_n^*(x), T_n^*(x)$ 称为 f 的最佳逼近多项式,一般地,设 g_k 为赋范线性空间$(X, \|\cdot\|)$中元素列,称它们的有限线性组合 $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x)$ 为广义多项式,对于 $f \in X$,同样定义

$$E_n(f) = \inf_{\{c_k\}}\{\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k g_k\|\} = \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k^* g_k\|. \tag{2.7}$$

并称之为 f 关于$\{g_k\}$的最佳逼近,$G_n^*(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^* g_k(x)$ 称为最佳逼近广义多项式.

若 X 为 Banach 空间,$\{g_k\}$ 是 X 中线性无关列.则 $\forall\, \varepsilon_n \downarrow 0$,存在 $f \in X$,使得 $E_n(f) = \varepsilon_n, n = 1,2,\cdots,\quad E_n(f) \leqslant \|f\|$.证明见[71]P.25 – 28.

设$\{g_k\}$为 $C[a,b]$ 中线性无关函数系,若任一个不恒为零的广义多项式 $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x)$ 在$[a,b]$上至多有 $n-1$ 个不同的根,则称$\{g_k\}$在$[a,b]$上满足 Haar 条件.

1. 设 $f \in C[0,1]$,则存在两个多项式列$\{P_n\}$和$\{Q_n\}$,使得 $\forall\, x \in [0,1]$,成立

$$Q_n(x) \leqslant Q_{n+1}(x) \leqslant f(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant P_n(x), \tag{2.8}$$

并且

$$\|P_n - Q_n\|_c \leqslant 42 E_n(f). \tag{2.9}$$

当 f 不是多项式时,(2.8) 式中成立严格的不等号.

(谢庭藩、周颂平,[391]1995,67:119 – 121.或[71]P28 – 30)

我们问:(2.9) 式中常数 42 能否减少?其最佳值是什么?

2. **Vallee-Poussin 不等式**:设$\{g_k\}$在 $C[a,b]$ 上满足 Haar 条件,$f \in C[a,b]$.若存在多项式 $G_n(x) = \sum_{k=r}^{n} C_k g_k(x)$,使得 $f(x) - G_n(x)$ 在$[a,b]$上至少有 $n+1$ 个点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 以正负相间的符号取到值 $a_0, a_1, \cdots, a_n$,则

$$E_n(f) \geqslant \min\{a_0, a_1, \cdots, a_n\}. \tag{2.10}$$

$E_n(f)$ 的这个下界估计在理论和实际上都十分重要.由此可推出:

若$\{g_k\}$在 $C[a,b]$ 上满足 Haar 条件,则 $\forall\, f \in C[a,b]$. $G_n^*(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^* g_k(x)$ 为 f 在 $C[a,b]$ 上的最佳逼近多项式的充要条件是 $f(x) - G_n^*(x)$ 在$[a,b]$上至少有 $n+1$ 个 Chebyshev 交错点$\{x_k\}_{k=0}^{n}$,即 $f(x) - G_n^*(x)$ 在这些点上以正负相间的符号取到其绝对值的最大值:

$$\| f - P_n^* \|_c = \max_{a \leqslant x \leqslant b} | f(x) - P_n^*(x) |.$$

证明见[127]P.24 - 26.

3. **插值不等式:**

(1) 设 $f^{(n+1)} \in C[a,b]$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 为 $[a,b]$ 上给定的插值结点. $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x) f(x_k)$ 为 Lagrange 插值多项式,式中 $l_k(x) = \dfrac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega'_n(x_k)}$, $\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$, $h = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{x_k - x_{k-1}\}$,则 $| f'(x) - P'_n(x) | < \dfrac{1}{2} h^n \| f^{(n+1)} \|_c$.

$$\| f^{(k)} - P_n^{(k)} \|_c \leqslant \frac{n! h^{n+1-k}}{(k+1)!(n+1-k)!} \| f^{(n+1)} \|_c, 2 \leqslant k \leqslant n.$$

(2) 设 $f \in C^n[-1,1]$, $\{x_k\}_{k=1}^n$ 为 $[-1,1]$ 上的插值结点, $P_n(x)$ 为 Lagrange 插值多项式,则

$$| f(x) - P_n(x) | \leqslant \frac{1}{n!} \| f^{(n)} \|_C \| \omega_n \|_c. \tag{2.11}$$

当插值结点 $\{x_k\}$ 取为 Chebyshev 多项式的零点:

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, k = 1, \cdots, n,$$

则误差(2.11)式变成

$$| f(x) - P_n(x) | \leqslant \frac{1}{n! 2^{n-1}} \| f^{(n)} \|_c. \tag{2.12}$$

(3) 给定 $[a,b]$ 的一个分划 $T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, $S(x)$ 满足:

① $S \in C^2[a,b]$;

② $S(x)$ 在每个子区间 (x_{k-1}, x_k) 上是三次多项式,则称 $S(x)$ 是关于分划 T 的三次样条函数.若给定连续函数 $y = f(x)$ 在结点 x_k 上的值 $y_k = f(x_k)$ 并使得

③ $S(x_k) = y_k, k = 0, 1, \cdots, n$.

则称 $S(x)$ 是 f 的三次样条插值函数,为确定 $S(x)$,要用 $4n$ 个条件,而 $S(x)$ 的定义中只给出了 $4n - 2$ 个条件.所以需要补充两个边界条件,常用的有:

④ 转角条件: $S'(x_0) = y'_0$, $S'(x_n) = y'_n$;

⑤ 弯矩条件: $S''(x_0) = y''_0$, $S''(x_n) = y''_n$.

若 $f \in C^4[a,b]$,则

$$\| f^{(k)} - S^{(k)} \|_c \leqslant C_k h^{4-k} \| f^{(k)} \|_c. \tag{2.13}$$

式中 $h = \max\{(x_k - x_{k-1}) : 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

4. **Jackson 不等式:**

(1) 若 $f \in \mathrm{Lip}_M 1$(即 $| f(x) - f(y) | \leqslant M | x - y |$)且 $f \in C_2\pi$,则

$$E_n^*(f) \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)} M. \tag{2.14}$$

式中 $\pi/2$ 是最佳常数.(见[109]P.182)

(2) 若 $f' \in C_{2\pi}$,则 $E_n^*(f) \leqslant \dfrac{\pi}{2(n+1)} \| f' \|_c$. (2.15)

式中 $\pi/2$ 也是最佳常数,见[109]P.179 - 182.

(3) 若 $f \in C_{2\pi}$,则 $E_n^*(f) \leqslant \omega(f,\frac{\pi}{n+1})$.

若 $f^{(k)} \in C_{2\pi}$,则 $E_n^*(f) \leqslant \frac{\pi}{2n^k}\omega(f^{(k)},\frac{\pi}{n})$; (2.16)

$$E_n^*(f) \leqslant \frac{c_k}{(n+1)^k}E_n^*(f^{(k)}). \tag{2.17}$$

见[61]P.216 - 223,[109]183 - 185.

(4) 设 $f^{(k)} \in C_{2\pi}$,则 $E_n^*(f) \leqslant \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^k \| f^{(k)} \|_c$.

式中$\frac{\pi}{2}$ 是最佳常数,见[109]P.185 - 186.

(5) 设 $f \in L_{2\pi}^2$,则 $E^*(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)_2$.

式中$\frac{1}{\sqrt{2}}$ 不能再改进.若 $f^{(k)} \in L_{2\pi}$,则

$$E_n^*(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{n^k}\omega(f^{(k)},\frac{\pi}{n})_2. \tag{2.18}$$

(2.18)式中的精确常数问题还未解决,$\omega(f,\delta)_2$ 表示 f 在 $L_{2\pi}^2$ 中的积分连续模.见[61]P224 - 230.

(6) 设 $f^{(k)} \in X = C_{2\pi}$ 或$L_{2\pi}^p, 1 \leqslant p < \infty. k = 2m - 1, m = 1,2,\cdots$,则

$$E_n^*(f)_X \leqslant \frac{C_k}{n^k}\omega(f^{(k)},\frac{\pi}{n})_X. \tag{2.19}$$

式中 $C_k = \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m(k+1)}}{(2m+1)^{k+1}}$ (Favad 常数).

当 $X = C_{2\pi}$ 和$L_{2\pi}^1 (p = 1)$ 时,(2.19) 式不能改进,证明见[61]P.235 - 239.

(7) 当 $f^{(k)} \in C[a,b]$ 时也有类似的结果,例如

$$E_n(f) \leqslant \frac{C_k(b-a)^k}{n^k}\omega(f^{(k)},\frac{b-a}{n}),\ (n > k, f^{(0)} = f);\quad E_n(f) \leqslant C_m\omega_m(f,\frac{1}{n}),$$

式中 $\omega_m(f,\frac{1}{n})$ 为 f 的 m 阶连续模,C_m 的最佳值已由 Favard 给出,当$[a,b] = [-1,1]$ 时,$C_1 = 6$;若 $f^{(n+1)} \in C[a,b]$,则 $E_n(f) \leqslant \frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \| f^{(n+1)} \|_c$.

(8) 设 $f' \in C[0,1]$,$S_n(f)$ 是分段线性函数,使得

$$S_n(f,\frac{k}{n}) = f(\frac{k}{n}), k = 0,1,2,\cdots,n,\quad 则$$

$$\| f - S_n(f) \|_c \leqslant \frac{1}{4n}\sup\{|f'(x+\frac{t}{2}) - f'(x-\frac{t}{2})| : 0 \leqslant t \leqslant \frac{2-\sqrt{2}}{n}, x \pm \frac{t}{2} \in [0,1]\}.$$

(Vinogradov,O.L.等.Dokl.Akad.Nauk 2000,373(4):442 - 444)

(9) 若 $f \in C[-1,1]$,则 $E_n(f) \leqslant \omega(f,\frac{\pi}{n+1})$;

若 $f\in \mathrm{Lip}_M 1$,即 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$,则 $E_n(f)\leqslant \dfrac{M\pi}{2(n+1)}$;

若 $f^{(k)}\in C[-1,1]$,$n\geqslant k$,则

$$E_n(f)\leqslant\left(\frac{\pi}{2}\right)^k\frac{\|f^{(k)}\|_C}{(n+1)n\cdots(n-k+2)}.$$

见[109]P188 - 189.

(10) $\omega_k(\dot{f},\dfrac{1}{n})\leqslant\dfrac{C_k}{n^k}\sum\limits_{j=0}^{n}(j+1)^{k-1}E_j^*(f)$.(Steckin,S.B)

注 在函数逼近论中,Jackson 不等式也称为**正定理**或 Jackson **定理**.

5. 设 $f\in L_{2\pi}$,则

$$f_h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+t)\mathrm{d}t\quad(h>0)$$

称为 f 的 Steklov 函数(位移平均),则当 $f\in L_{2\pi}^p(1\leqslant p<\infty)$ 时,成立

(1) $\|f_h\|_p\leqslant\|f\|_p$; (2) $\|f-f_h\|_p\leqslant\omega(f,h)_p$;

(3) $\|f'_h\|_p\leqslant\dfrac{1}{h}\omega(f,h)_p$.(证明见[61]P.84 - 85,162)

(4) 设 $1\leqslant p\leqslant q$,$r=1/q-1/p$,则 $|f_h(x)|\leqslant h^{-1/p}\|f\|_p$; $\|f_h\|_q\leqslant h^r\|f\|_p$.

(5) 若 $f\in C[a,b]$,则 $\|f_k-f\|_c\leqslant\dfrac{5}{2}\omega(f,h)_2$.

(6) 若 $f\in BV[0,2\pi]$,则 $V_0^{2\pi}(f_h)\leqslant V_0^{2\pi}(f)$.

注 $f_h(x)$ 又称为 f 的位移平均或第一积分平均,或 Riemann-Lebesgue 奇异积分,它实际上是数列算术平均的积分形式,记为 $A_{2h}^1(f,x)$.

f 的 r 阶积分平均可用归纳法依次定义为

$$A_h^r(f,x)=A_h^1(A_h^{r-1}(f,\cdot),x).$$

当 $f\in L_{2\pi}^p(1\leqslant p<\infty)$ 或 $f\in C_{2\pi}$ 时,

$$A_h^r(f,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(hk/2)}{hk/2}\right)^r\hat{f}(k)e^{ikx},$$

右边定义了 f 的 Fourier 级数的 r 阶 Riemann 求和,其中 $k=0$ 时的值为 $\hat{f}(0)$,$\hat{f}(k)$ 为 f 的 Fourier 系数,见[91]P49,56,80.

6. **Bernstein 不等式**:这是用最佳逼近不等式来刻画函数类,下面用到的函数类是:

$\mathrm{Lip}\alpha=\{f:|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},0<\alpha\leqslant1\}$,

$Z=\{f\in C_{2\pi}:|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant Mh\}$.称为 Zygmund 函数类;

$W=\{f:\omega(f,t)\leqslant ct(1+|\ln t|)\}$. $\mathrm{Lip}1\subset Z\subset W\subset \mathrm{Lip}\alpha\quad(0<\alpha<1)$.

(1) 设 $f\in C_{2\pi}$ 且 $E_n^*(f)\leqslant\dfrac{C}{n^{\alpha}}$,$0<\alpha\leqslant1$,则当 $0<\alpha<1$ 时,$f\in\mathrm{Lip}\alpha$;$\alpha=1$ 时 $f\in W$.

证明中用到以下不等式:设 $f\in C_{2\pi}$,则

$$\omega(f,\frac{1}{n})\leqslant\frac{c}{n}\sum_{k=0}^{n}E_k^*(f);$$

(2) 设 $f \in C_{2\pi}$ 且 $E_n^*(f) \leqslant \frac{c}{n^{k+\alpha}}, 0 < \alpha \leqslant 1, k \in N$,则 $f^{(k)} \in C_{2\pi}$;且当 $0 < \alpha < 1$ 时,$f^{(k)} \in \mathrm{Lip}\alpha$;当 $\alpha = 1$ 时,$f^{(k)} \in W$.

提示:由条件证 $E_n^*(f^{(k)}) \leqslant c/n^\alpha$.

(3) 设 $f \in C_{2\pi}$,则 $f \in Z \Leftrightarrow E_n^*(f) \leqslant c/n$.

对于非周期情况,也有类似的结果,其证明见[82],[68]或[71].

7. **Lebesgue 不等式**:设 $f \in C_{2\pi}, S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$ 为 f 的 Fourier 级数的 n 阶部分和,则

$$\| S_n(f) - f \|_c \leqslant (3 + \ln n)E_n^*(f).$$

提示:设 $T_n^*(x)$ 为 f 的最佳逼近多项式,利用 $\| S_n \| < 2 + \ln n$,得到

$$\| S_n(f) - f \|_c \leqslant \| S_n(f) - T_n^* \|_c + \| T_n^* - f \|_c \leqslant$$

$$\leqslant (\| S_n \| + 1)E_n^*(f) < (3 + \ln n)E_n^*(f).$$ (另见第 14 章,§2.N.7)

8. 设 $S_n(f,x)$ 为 f 的 Fourier 级数的 n 阶部分和(见本节 $N.7.$). S_n 的算术平均(Fejer 平均)为:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x).$$

若 $f \in C_{2\pi} \cap \mathrm{Lip}_M\alpha, 0 < \alpha < 1$,则

$$\| \sigma_n(f) - f \|_c \leqslant \frac{M}{n^\alpha}\left(\frac{\pi 2^\alpha}{1 - \alpha^2}\right).$$

若 $f \in \mathrm{Lip}_M 1$,则 $\| \sigma_{n-1}(f) - f \|_c < \frac{AM\ln n}{n} (n > 1).$

9. **Bohr-Favard 不等式**:设

$$f(x) = \sum_{k=n}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

是有 r 阶连续导数 $f^{(r)}(x)$ 的任意周期函数,其中 n 和 r 是给定的自然数,则

$$\| f \|_c \leqslant K(n,r) \| f^{(r)} \|_c.$$

式中 $\| f \|_c = \max\{ | f(x) | : x \in [0,2\pi]\}$.

$K(n,r) = \sup\{ \| f \|_c : \| f^{(r)} \|_c \leqslant 1\}$ 是最佳常数,见[107]1:384.

10. **联合逼近不等式**:

(1) 设 $f^{(m)} \in C_{2\pi}$,则存在 n 阶三角多项式 $T_n(x)$,使得

$$\| f^{(k)} - T_n^{(k)} \|_c \leqslant C_m E_n^*(f^{(k)}), k = 0,1,\cdots,m.$$

(2) 设 $f^{(m)} \in C[-1,1]$,则存在 n 阶代数多项式 $P_n(x)$,使得

$$| f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) | \leqslant \frac{C_m}{\Delta_n(x)^k} \cdot \frac{E_n(f^{(k)})}{n^k}, x \in [-1,1], k = 0,1,\cdots,m.$$

$$\Delta_n(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

(3) 设 $f^{(m)} \in C[-1,1]$,则 $\forall n > 2m$,存在 n 阶代数多项式 $P_n(x)$,使得

$$|f^{(k)}(x)-P_n^{(k)}(x)|\leqslant C_{m,k}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{m-k}E_{n-m}(f^{(m)}),\text{和 } f^{(m)}(\pm 1)-P_n^{(m)}(\pm 1)=0,$$

$0\leqslant k\leqslant m$，$|x|\leqslant 1$.（Kilgore, T., Approx, theory, Memphis, TN, 1991, P353－361）

11. 设 $f^{(n+1)}\in C[-1,1]$，$P_n^*(x)$ 为 f 的最佳逼近多项式，则

$$\|f^{(k)}-(P_n^*)^{(k)}\|_c\leqslant\frac{2^{n+1-k}}{n!}\|f^{(n+1)}\|_c,$$

式中 $0\leqslant k\leqslant n+1$.

§3　微分不等式

1. **微分中值定理**：在现行数学分析教材中，微分中值定理都写成等式形式：$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$，式中 c 只知道与 b,a,f 有关，并不知道 c 的确切值，实际上，只要知道 f' 的上下确界，即令 $m=\inf\{f'(x):x\in(a,b)\}$. $M=\sup\{f'(x):x\in(a,b)\}$，就得到

$$m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a).\tag{3.1}$$

这就表明，微分中值定理的实质是由不等式(3.1)而非等式的形式所揭示出来，它有以下改进和推广：

(1)　设 $f\in C[a,b]$，f 在开区间 (a,b) 上存在单侧导数 $f'_-(x)$，$f'_+(x)$，则存在 $c:a<c<b$，使得

$$f'_-(c)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_+(c).\tag{3.2}$$

或上式中两个不等号均反向.

(2)　在(3.1)中的 m,M 的定义式中，$f'(x)$ 还可减弱为单侧导数 $f'_-(x)$，$f'_+(x)$，或 Dini 导数，如

$$D^+f(x)=\limsup_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

见[305]1986, 93(6): 471－475.

(3)　设 $f'\in C[a,b]$，$\|f''\|_\infty<\infty$，则

$$M-\frac{b-a}{2}\|f''\|_\infty\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant m+\frac{b-a}{2}.$$

(Ostrowski[21]P.535)

(4)　设 $(X,\|\cdot\|)$ 为 Banach 空间，区间 $[a,b]$ 为 R^1 中有限闭区间，$f:[a,b]\to X$ 为连续映射，$\varphi:[a,b]\to R^1$ 为连续函数，若存在 $[a,b]$ 的一个可数子集 A，使得 $\forall x\in[a,b]-A$，f,φ 在 $c\in[a,b]$ 都存导数，并且　$\|f'\|\leqslant\varphi'(c)$，则

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\varphi(b)-\varphi(a).\tag{3.3}$$

证明见[74]Vol.1.P171－175.

2. 设 f 在半开区间 $[0,1)$ 上有连续导数，且 $|f'(x)|\leqslant M(1-x)^{\alpha-1}(0<\alpha\leqslant 1)$，则对 $[0,1]$ 中任意 x_1,x_2，有