§2　有界变差函数不等式

一、　基本概念

一元有界变差函数的概念及其性质可参看有关“实分析”(实变函数论)的著作，如[58,64,98,103,115,118,119]等．

定义 1　设 f 是 $[a,b]$ 上的有限函数，对 $[a,b]$ 的任一分划 $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$，$f$ 在 $[a,b]$ 上关于 T 的变差和全变差分别定义为

$$V_a^b(f,T)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|;\quad V_a^b(f)=\sup_T\{V_a^b(f,T)\}.$$

若 $V_a^b(f)<\infty$，称 f 是 $[a,b]$ 上有界变差函数．记为 $f\in BV[a,b]$．开区间 (a,b) 和无穷区间上的有界变差函数可通过极限过程来定义．由 Jordan 分解定理，$f\in BV[a,b]\Leftrightarrow f=g-h$，式中，$g,h$ 是 $[a,b]$ 上递增函数．$f\in BV[a,b]\Leftrightarrow$ 存在 $[a,b]$ 上递增函数 φ，使得 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)\leqslant\varphi(x_2)-\varphi(x_1)$．这时 φ 称为 f 的强函数．(见[118]P147→156)．

定义 2　设 f 是 $[a,b]$ 上的有限函数．

$$\Delta_h^m f(x)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}f[x+(m-k)h].$$

对 $[a,b]$ 的任一分划 $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$．记

$$V_a^b(f,T)_m=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\Delta_{\alpha_k}^{m-1}f(x_k)}{\alpha_k^{m-1}}-\frac{\Delta_{\alpha_{k-1}}^{m-1}f(x_{k-1})}{\alpha_{k-1}^{m-1}}\right|,\text{式中 }\alpha_k=\frac{1}{m-1}(x_k-x_{k-1}),$$

若 $V_a^b(f)_m = \sup_T V_a^b(f,T)_m < \infty$,则称 f 是$[a,b]$上 m 阶有界变差函数.

有关性质见[333],1981,26(6):381.

定义 3 设 f 是$[a,b]$上有限函数,φ 在$(0,\infty)$上递增连续,$\varphi(0)=0$. $T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$为$[a,b]$的任一分划,若

$$\sup_T\left\{\sum_{k=1}^n \varphi(|f(x_k)-f(x_{k-1})|)\right\}<\infty.$$

则称 f 是$[a,b]$上有界 φ 变差函数,记为 $f\in BV_\varphi[a,b]$.

当 $\varphi(x)=x$ 时,得到定义 1.

但对于多元变差却有好几种定义,如 Arzela 变差,Vitali 变差,Pierpont 变差,Frechet 变差,Hardy 变差等,[117]第 5 章利用分布意义下的偏导数给出了如下的定义.

定义 4 设 G 为 R^n 中开集,$C_0^\infty(G)$表示 G 上有紧支集的无穷次可微函数空间. $f\in L^1(G)$. f 的全变差定义为

$$\|Df\|=\sup\left\{\int_\Omega f\operatorname{div}g\,dx: g=(g_1,\cdots,g_n)\in C_0^\infty(G;R^n),\ |g(x)|\leqslant 1, x\in G\right\}.$$

式中 $C_0^\infty(G;R^n)$ 表示 $g:G\to R^n$, $g_k\in C_0^\infty(G)$, $1\leqslant k\leqslant n$; $\operatorname{div}g=\sum_{k=1}^n D_k g_k$.
若 $\|Df\|<\infty$,则称 f 是 G 上有界变差函数,记为 $f\in BV(G)$. 在 $BV(G)$ 中定义范数 $\|f\|_{BV}=\|f\|_1+\|Df\|$,式中 $\|f\|_1=\int_G|f(x)|\,dx$.

二、 有界变差函数不等式

由定义 3 导出的有关不等式见[117]第 5 章,本书着重介绍按定义 1 导出的有关不等式.

1. 设 $f\in C[a,b]$, $g\in BV[a,b]$,则

(1) $\left|\int_a^b f dg\right|\leqslant\|f\|_c\cdot V_a^b(g)$. 式中 $\|f\|_c=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$.

(2) $\int_a^b|g'|\leqslant V_a^b(g)$. (Lebesgue). 仅当 g 在$[a,b]$上绝对连续时等号成立.

2. 设 $f,g\in BV[a,b]$, $f\geqslant 0$, f 与 g 没有公共间断点 1956 年 Ganelius,T. 证明

$$\int_a^b dg\leqslant\left\{\inf_{x\in(a,b]}f(x)+V_a^b(f)\right\}\sup\left\{\int_E dg: E\subset[a,b]\right\}. \tag{2.1}$$

1984 年,Knowles, Ian 将上式改进为

$$\int_a^b f dg\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)+V_a^b(f)]\sup\left\{\int_E dg: E\subset[a,b]\right\}.$$

若 f 变号,则(2.1)式变成

$$\int_a^b f dg\leqslant[g(b)-g(a)]\left(\inf_{x\in[a,b]}f(x)\right)+V_a^b(f)\sup\left\{\int_E dg: E\subset[a,b]\right\}.$$

见[306]MR86a:26026.

3. 令 $BV_0[a,b]=\{f\in BV[a,b]: f(a)=0\}$. 若 $f,g\in BV_0[a,b]$,则

$fg \in BV_0[a,b]$,且 $V_a^b(fg) \leqslant V_a^b(f)V_a^b(g)$. (见[305]1980,87(1):39 - 40)

4. 设 $f,g \in BV[a,b]$,则

$$V_a^b(fg) \leqslant \|f\|_c V_a^b(g) + \|g\|_c V_a^b(f).$$

(见[119]P.238)

5. 设 $f \in L[a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $x \in [a,b]$ 则 $V_a^b(F) \leqslant \int_a^b |F'|$.(见[119]P.243)

6. 设 $f \in BV[0,a]$. $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. $F(0) = 0$, 则 $F \in BV[0,a]$.(见[119]P263)

7. 设 $f_k \in BV[a,b]$, $V_a^b(f_k) \leqslant M$ $(\forall k)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$. 则 $f \in BV[a,b]$,且 $V_a^b(f) \leqslant M$.

8. 设$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^k$,则 $f \in BV[-1,1]$.

9. 设 $f_k \in BV[a,b]$, $q_k > 0$, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k$. $F(x) = \frac{1}{Q_n}\sum\limits_{k=1}^{n} q_k f_k(x)$, l_k 表示 f_k 在 $[a,b]$ 上的弧长,L 为 F 在$[a,b]$上的弧长(在间断点的跳跃必须包括在弧长内),则

$$L \leqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_k l_k. \tag{2.2}$$

提示:对$[a,b]$的任一分划 $T = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}$.

$$l_k(T) = \sum_{j=1}^{m} \{(x_j - x_{j-1})^2 + [f_k(x_j) - f_k(x_{j-1})]^2\}^{1/2}.$$

$l_k = \sup\limits_T l_k(T)$. 再利用$\sqrt{c^2 + t^2}$ 是凸函数和

$$\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{m} q_k l_k \geqslant \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{m} q_k l_k(T) \geqslant L(T). \tag{2.3}$$

式中 $L(T) = \sum\limits_{j=1}^{m} \{(x_j - x_{j-1})^2 + [F(x_j) - F(x_{j-1})]^2\}^{1/2}$.

(2.3)式两边对 T 求 sup,即得(2.2)式.

10. 设 $f \in BV[0,2\pi]$,再将 f 作 2π 周期的延拓. ω 是$[0,2\pi]$上非负可积函数,令

$$F(x) = \frac{1}{\int_0^{2\pi} \omega(y)\mathrm{d}y}\int_0^{2\pi} \omega(y) f(x+y)\mathrm{d}y.$$

l,L 分别表示 f 与 F 在$[0,2\pi]$上的弧长,则 $F \in BV[0,2\pi]$ 且 $L \leqslant l$.

证明见[56]Vol.1.P.73.271 - 272.