§ 3　调和函数不等式

一、调和函数的定义及其性质

设 $u(x) = u(x_1, \cdots, x_n)$ 在区域 $D \subset R^n$ 上有二阶连续偏导数，且满足 Laplace 方程：

$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} \partial^2 u / \partial x_k^2 = 0, (x \in D)$,则称 u 是D 上的 n 元调和函数.

调和函数 u 的一个基本性质是平均值公式:u 在以x 为中心,r 为半径的球面$S(x,r)$ 上的平均值等于它在圆心的值,即

$$u(x) = \frac{1}{\mu(S(x,r))}\int_{S(x,r)} u(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\sum_{n-1}} u(x + rt')\mathrm{d}t'$$

式中$\sum_{n-1}$是 R^n 中单位球面,$\omega_{n-1} = \mu(\sum_{n-1})$ 为$\sum_{n-1}$的表面积.

利用平均值公式立即得出调和函数的最大最小值原理;若 u 在区域D 内调和,在 D 的闭包$\overline{D}$ 上连续,若 u 不是常数,则它不能在 D 的内部取得最大最小值,即 $\forall x \in D$,成立$\inf\{u(x): x \in D\} < u(x) < \sup\{u(x): x \in D\}$ (其中上,下确界均为有限数).

当 $n = 2$ 时,用复数 $z = x + iy$ 的记号,将 $u(x,y)$ 记为 $u(z)$,若 $u(z)$ 在 $|z| < R$ 内调和,在 $|z| \leqslant R$ 上连续,则 $\forall z_0$: $|z_0| < R$,平均值公式可写成

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=R} \frac{R^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2} u(Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

这就是著名的泊松公式.

二维调和函数和解析函数有密切联系:在区域 D 内的调和函数一定是D 内某解析函数的实部或虚部;反之,D 内的解析函数的实部与虚部都是D 内的调和函数,并称虚部为实部的共轭调和函数.调和函数的详细讨论见[65]第二、六章,[72]、[87]、[114]等.

二、　调和函数不等式

1.　设 B 是上半空间$R_+^{n+1} = \{(x,y): x \in R^n, y > 0\}$ 中以(x_0,y_0) 为中心的球,$u(x,y)$ 在 B 内调和,在 B 的闭包上连续,则对任意正数 p,成立

$$|u(x_0,y_0)|^p \leqslant \frac{C}{\mu(B)}\int_B |u(x,y)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{3.1}$$

式中 $\mu(B)$ 是球 B 的体积,常数 C 与B 无关.(见[322]1972,129:137－193.)

(3.1) 是上半空间 R_+^{n+1} 中的调和函数不等式.由此可以推出:若 $u(x,y)$ 在 R_+^{n+1} 中调和,而且对 $0 < p < \infty$,有

$$\sup_{y>0}\int_{R^n} |u(x,y)|^p \mathrm{d}x < \infty, \text{则}\quad \sup_{x\in R^n} |u(x,y)| \leqslant Ay^{-n/p}\quad (0 < y < \infty).$$

2.　若 $u(x) = u(x_1,\cdots,x_n)$ 是区域 D 上的n 维调和函数,$B = B(x,r)$ 是 D 中以 x 为中心,r 为半径的球,$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 为多重指标,记 $|\alpha| = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k, D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$,则

$$|D^\alpha(x)| \leqslant A_\alpha r^{-(n/2+|\alpha|)}\left(\int_B |u(y)|^2\mathrm{d}y\right)^{1/2}.$$

见[72]P.275.

下面 3 ~ 6 是二维调和函数不等式,

3.　**Harnack 不等式**:设 $u(z)$ 是单位圆盘$D(|z| < 1)$上非负的调和函数,$D(z_0,r) = \{z \in D: |z - z_0| < r\}$.则

$$\sup\{u(z):z\in D(z_0,r)\}\leqslant\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\inf\{u(z):z\in D(z_0,r)\}.$$

证明见[87]P.187 - 188.278.

4. **Hardy-Littlewood 平均值不等式**：设 u 在单位圆盘 D 上调和，$D(z_0,r)\subset D(z_0,R)\subset D$，若 $0<p<\infty$，则存在常数 $c=c(p)$（与 R,r,u 无关），使得

$$\sup\{|u(z)|:z\in D(z_0,r)\}\leqslant\frac{c}{(R-r)^{2/p}}\left(\int_B|u(z)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{1/p},\tag{3.2}$$

式中 $B=D(z_0,R)\setminus D(z_0,r)\ (0<r<R)$.

更一般地，若(3.2)式对某个 $p_0(0<p_0<\infty)$ 成立，则(3.2)式也对所有 $p:0<p<p_0$ 也成立. 见[87]P.188 - 181.

5. **Littlewood 从属运算(Subordination)定理**：设 $u(z)$ 是 D 中的次调和函数，f 是 D 中的解析函数，且满足 $|f(z)|\leqslant|z|$，则

$$\int_T u(f(re^{it}))\mathrm{d}t\leqslant\int_T u(re^{it})\mathrm{d}t,0<r<1,T=(-\pi,\pi].$$

提示：不妨设 $f(z)\not\equiv z\exp(i\lambda)$，$\lambda$ 为实数，于是当 $|z|\leqslant r$ 时 $|f(z)|<r$. 若 $\omega(z)$ 表示 $u(z)$ 对 $D(0,r)$ 的调和扩张，则 $\omega(f(z))$ 在 $|z|\leqslant r$ 中调和. 由平均值性质，有

$$\int_T w(f(re^{it}))\mathrm{d}t=2\pi\omega(f(0))=2\pi\omega(0)=\int_T u(re^{it})\mathrm{d}t.$$

再考虑到 $z\in D(0,r)$ 时，$u(z)\leqslant\omega(z)$，不等式即可得证. 见[87]P.197.N,6.31.

6. 设 $u=u(x,y)$ 为单位圆 D 上的非负调和函数，C_1,C_2 为 D 内光滑曲线，C_1 位于 C_2 所围的区域内，令 $f(x,y)=(u(x,y))^p,(p>0)$，则

(1) 当 $p>1$ 时，$0\leqslant\int_{C_1}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s\leqslant\int_{C_2}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s$，当 $0<p<1$ 时，两个不等号均反向，当 $p=1$ 时，

$$0=\int_{C_1}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s\leqslant\int_{C_2}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s,$$

式中 $\partial f/\partial n$ 是 f 沿曲线 C 的外法向的方向导数.

(2) 当 $p>1$ 时，

$$(u(0,0))^p\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[u(r\cos\theta,r\sin\theta)]^p\mathrm{d}\theta,$$

当 $0<p<1$ 时，不等号反向. 当 $p=1$ 时等号成立，这就是二维调和函数的泊松公式. 其中 $0<r<1$.

7. 若 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内调和且非负，则

$$f(0)\frac{R-|z|}{R+|z|}\leqslant f(z)\leqslant f(0)\frac{R+|z|}{R-|z|}.$$

8. **R^n 中的 Harnack 不等式（对偶 Harnack 不等式）**：这是正调和函数两个值之比 $u(x)/u(y)$ 的上、下界估计不等式.

设 D 为 R^n 中的区域，u 是 D 上非负调和函数，$D(x_0,r)$ 是 R^n 中以 x_0 为中心，r 为半径的开球，若闭包 $\overline{B(x_0,r)}\subset D$，$\forall x\in B(x_0,\rho)$，$0<\rho<r$，成立

$$\left(\frac{r}{r+\rho}\right)^{n-2}\left(\frac{r-\rho}{r+\rho}\right)u(x_0)\leqslant u(x)\leqslant\left(\frac{r}{r-\rho}\right)^{n-2}\left(\frac{r+\rho}{r-\rho}\right)u(x_0),\text{或}$$

$$\max\{u(x):x\in B(x_0,\rho)\}\leqslant\left(\frac{r-\rho}{r+\rho}\right)^n\min\{u(x):x\in B(x_0,\rho)\}.$$

相关文献见[107]2:837 - 838.