§2 多边形与多面体不等式

一、(平面)四边形不等式

设四边形 $ABCD$ 的边长为a,b,c,d,面积为 S,对角线长为 l_1,l_2,,若存在内切圆和外接圆,它们的半径分别 r,R. 仍用$\sum$,$\prod$ 分别表示循环和、积. 例如$\sum f(a)$ 表示 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)$,因此半周长 $p=(\sum a)/2$.

(一) 一般四边形不等式

1. **托勒密不等式:**$l_1 l_2 \leqslant ac+bd$.

提示:用复数证法. 以 A 为原点,设 B,C,D 对应的复数分别为z_1,z_2,z_3. 由三角不等式 $|z_2(z_1-z_3)| \leqslant |z_1(z_2-z_3)|+|z_3(z_1-z_2)|$ 即可得证.

2. 在边长为一定的所有四边形中,以内接于圆的四边形的面积为最大,即

$$S \leqslant \sqrt{\prod(p-a)} \leqslant p^2/4. \qquad \{等正\}$$

提示:求 $S=\dfrac{1}{2}(ab\sin\theta+cd\sin\varphi)$ 在 $\theta+\varphi=\pi$ 时取得最大值. 第二个不等式用 A-G 不等式证明.

3. $p < l_1 + l_2 < 2p$.

推广：$t > 0$ 时，有 $p(l_1^t + l_2^t) > l_1^{t+1} + l_2^{t+1}$. 见[3]15.1,2.

4. $4S \leqslant (a+c)(b+d) \leqslant \sum a^2$; $\sum ab \geqslant 6S$.

5. $(S\sum a)^2 \leqslant 2(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)$.

6. $8S^3 \leqslant (ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)$.

7. $64S^3 \geqslant \prod(a+b)$.

8. 1987 年杨学校证明：$16S^2 \leqslant (\sum a)(\sum abc)$.

1991 年作者又作了加权推广. 见[348]1991,6:41.

9. $32\prod a \leqslant 3(\sum a^2)^2 - 4(\sum a^4)$,

仅当 $ABCD$ 为菱形时等号成立(陈计、王振).

10. [MCM]. 设 a,b,c,d,l_1,l_2 的最大最小值分别记为 M,m. 则

$$M \geqslant \sqrt{2}m. ([3]P.157)$$

11. [MCM]. 设四边形 AB,BC,CD,DA 的中点分别为 E,F,G,H，则

$$S \leqslant GE \cdot HF \leqslant (a+c)(b+d)/4.$$

12. 若 G 是四边形所在平面上任一点，则 $\sum GA^2 \geqslant 2S$.

13. 若四边形 $ABCD$ 在单位正方形每边上各有一个顶点，则 $2 \leqslant \sum a^2 \leqslant 4$.

14. 若 G 是等腰梯形 $ABCD(AD \parallel BC)$ 内任一点，则 $GB + GC < AB + AC$.

见[345]1991,7:49.

(二) 凸四边形不等式

1. 设 $ABCD$ 为凸四边形，则

(1) **Mircea 不等式**：$2 < \sum \sin(A/2) \leqslant 2\sqrt{2}$;

$$4(\sqrt{2}-1) \leqslant \sum \operatorname{tg}(A/4) < 2. \text{（见[19]401）}$$

(2) $2S \leqslant ab + cd$; $2S \leqslant ac + bd$.

(3) 若 $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$，则 $S \leqslant 3\sqrt{3}c^2/4$.（见[363]1969,B20:100－102）

(4) 若 $A + C > \pi$，则 $l_1/l_2 < (ad+bc)/(ab+cd)$.

(5) 1986 年 Tutescu 曾提出猜想：

$$\sqrt{l_1^2 + l_2^2} \leqslant 2\max\{a,b,c,d\}.$$

等号在什么条件下成立？见[363]1986,91,220；1991 年已证明. 见“数学教学”1991,1:30.

1994 年文家金证明

$$2\min\{a,b,c,d\} \leqslant \min\{a,c\} + \min\{b,d\} \leqslant \sqrt{l_1^2 + l_2^2};$$

当 $ABCD$ 是空间四边形时，成立

$$\sqrt{l_1^2 + l_2^2} \leqslant \min\{\sqrt{b^2+d^2+2ac}; \sqrt{a^2+c^2+2bd}\} \leqslant$$

$$\left\{\frac{1}{2}[(a+c)^2 + (b+d)^2]\right\}^{1/2} \leqslant (\sum a^2)^{1/2} \leqslant 2\max\{a,b,c,d\}.$$

（见[100]P328－335).

(6) 若 G 是凸四形形 $ABCD$ 所在平面上任一点，则 $\sum GA^2 \geqslant (\sum a^2 + l_1^2 + l_2^2)/4$.

(7) 设正数 λ_k 满足 $\lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_4 = 2$，则

$$\sum \lambda_1 a^2 \geqslant 4(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_4 - 1)S,$$

仅当所有 $\lambda_k = 1$，且凸四边形为正方形时等号成立，见[348]1989,6:4－5.

(8) 若 $R = 1$，则 $0 < 2p - (l_1 + l_2) < 2$.

(9) 若 $S = 1$，则 $\sum a \geqslant 4$; $l_1 + l_2 \geqslant 2\sqrt{2}$.

(10) 设在凸四边形 $ABCD$ 内有一点 Q 与 CD 相距为 h，且 $AQ = h + AD, BQ = h + BC, AB = BC + AD$. 则

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}. \qquad \text{(30 届 IMO)}$$

提示：分别以 A, B, Q 为圆心，以 AD、BC、h 为半径作圆，由条件知，这三个圆相互外切，而且圆 Q 与 CD 相切. 再作圆 A 与圆 B 的外公切线 MN，然后作与圆 A、圆 B、MN 相切的圆 O，则圆 O 的半径 $r \geqslant h$. 再考虑直角梯形 $ABNM$ 中的几何关系. 详见[99](4)5－7.

(11) [MCM] 过凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点 M，作 AB 的平行线交 BC 于 P，交 AD 于 Q，记 $a = AB, c = CD$. 则

$$MP^2 + MQ^2 \geqslant (ac)^2/(a^2 + c^2).$$

(12) $\sum (\csc \frac{A}{2})^4 \geqslant 16$.

2. 在凸四边形 $ABCD$ 中，记 $u = CA + CB, v = DA + DB$，则对于 CD 上任一点 E，都有

$$EA + EB \leqslant \max\{u, v\}. \qquad (16.1)$$

证明 先在 CD 上找出使(16.1)式成立的特殊点，例如取 CD 的中点 Q，则

$$QA < (AC + AD)/2, \quad QB < (BC + BD)/2.$$

相加得 $QA + QB < (u + v)/2 \leqslant \max\{u, v\}$.

其次找 QC 的中点 E_1 和 QD 的中点 E_2，易证它们也满足

$$E_kA + E_kB \leqslant \max\{u, v\}, k = 1,2. \qquad (16.2)$$

如此下去，得到无穷点集 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$，它在 CD 上是稠密的，再用极限知识即可得证. 见[99](5);73.

3. 设 d_1, d_2 是凸四边形 $ABCD$ 中两条垂直的弦，它们将四边形的周长 $2p$ 分成4等份，则 $p \leqslant d_1 + d_2$，仅当四边形为矩形时等号成立. [53]91 指出，这个问题除特殊情形外还未解决.

4. **平行四边形不等式**：设 $ABCD$ 为平行四边形，则

(1) 设 F 是不在对角线交点上的任一点，则 $\sum AF > AC + BD$.

(2) 四边形内部任一点 Q 到各顶点距离之和不小于该点到各边距离之和的$\sqrt{2}$ 倍.

(3) 在 BC, CD 上分别取点 E, F，则 $S_{\triangle AEF} < S/2$.

5. 设四边形有外接圆，则

(1) $\sum a \leqslant 4\sqrt{2}R$； (2) $\prod a \leqslant 4R^4$； {等正}

(3) $\sum(a^{-1}) \geqslant 2\sqrt{2}/R$； (4) $\sum(a^{-2}) \geqslant 4(l_1^{-2}+l_2^{-2}) \leqslant (p/S)^2$； {等正}

(5) $4(\prod a)\sin^2(\frac{A+C}{2}) \leqslant (l_1 l_2)^2$； (6) $l_1 l_2 > 2(S/p)^2$.

6. 设四边形有内切圆，则

(1) $p \geqslant 4r$； {等正}

(2) $\sum a^2 b(a-b) \geqslant 0$.（安振平，[348]1991，8:21－24）

(3) $\sum(p-a)^{-3} \geqslant 2(pr^2)^{-1}$，见[345]1991，12.

问：当 $t \neq 3$ 时 $\sum(p-a)^{-t}$ 的上下界是多少？

（三） 双圆四边形不等式

设 $ABCD$ 为双圆四边形，即四边形既有内切圆，又有外接圆. 则

1. **欧拉不等式**：$R \geqslant \sqrt{2}r$. 这个不等式已有许多改进，例如：1986 年 Lascu，M. 证明 $R \geqslant (1/2)\max\{l_1, l_2\} \geqslant \sqrt{2}r$，见[363]1986，91:95.

1990 年肖振纲证明 $R \geqslant (\sqrt{2}/8)\sum a \geqslant \sqrt{2}r$，见“数学教学研究”（甘肃）1990.5:25－26，同年杨世国又证明 $R^2 \geqslant 2r^2 + OG^2$，式中 O, G 分别为四边形的外心与重心. 仅当四边形为正方形时等号成立. 见[350]1990.4:41－42. 1995 年甘志亮证明（[350]1993，1）：

$$2r^2 \leqslant \frac{S}{2} = \frac{1}{2}(\prod a_k)^{1/2} \leqslant \frac{1}{12}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4} a_k a_j \leqslant \frac{1}{32}(\sum_{k=1}^{4} a_k)^2 \leqslant \frac{1}{8}(\sum_{k=1}^{4} a_k^2) \leqslant R^2.$$

2. $(\sum a)^2 \geqslant 8(ac+bd)$，

3. $(a+c)^2 \geqslant 8\sqrt{2}Rr$，{等正}.

4. $(a+c)^2 \geqslant 8Rr\sqrt{1+\sin A\sin B}$；

5. $(\sum a)^2 \geqslant 8 l_1 l_2$.

6. $\prod a \leqslant 8(Rr)^2$. 见[19]402－405.

7. $S \leqslant \frac{p^2}{4}$； $\frac{(2-\sqrt{2})\sqrt{S}}{S} \leqslant \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$.

（张克刚，“中等数学”（天津），1993，4:3－5）

二、（平面）五边形不等式

设五边形 $ABCDE$ 的面积记为 S.

1. (1) [MCM]. 设 $ABCDE$ 为凸五边形，A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 分别是五边形各边的中点，则 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的面积 $S_1 \geqslant \frac{1}{2}S$；若凸五边形顶点坐标均为整数，则 $S \geqslant \frac{5}{2}$.

(2) $\Delta EAB, \Delta ABC, \Delta BCD, \Delta CDE, \Delta DEA$ 的面积依次记为 S_1 至 S_5. 则

$$\min_{1\leqslant k\leqslant 5}\{S_k\} \leqslant \frac{2S}{5+\sqrt{5}} \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant 5}\{S_k\}； \quad \left(\prod_{k=1}^{5} S_k\right)^{1/5} \leqslant \frac{2S}{5+\sqrt{5}} \leqslant \left(\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5} S_k^2\right)^{1/2},$$

见[348]1992，10:41－42；[345]1999，8:26－28.

2. 设 $ABCDE$ 为正五边形，则 $S/4 < S_{\triangle BAE} < S/3$.

3. 设直线 l 过正五边形的中心 O 且与该五边形的各边或其延长线交于 $M_k(1\leqslant k\leqslant 5)$，则

$$\sum_{k=1}^{5}(OM_k)^{-1}\leqslant 4/R.$$

见[345]1991,7.

三、（平面）n 边形不等式

设（平面）n 边形 $(n\geqslant 3)A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 $a_k, a_{n+1}=a_1$，面积为 S，周长为 $L=2p=\sum a_k$.

（一） 一般 n 边形不等式

1. [MCM] 若多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内有另一多边形 $B_1B_2\cdots B_n$，这两个多边形的边对应平行，且每两个平行边之间距离都是 1. 设多边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的面积为 S_1，周长为 L_1，则 $S-S_1>L_1+\pi$.

2. 设 x_k, y_k 分别是 n 边形的内点 Q 到顶点和边的距离. 则

$$\prod x_k\geqslant(\sec(\pi/n))^n\prod y_k.$$

3. 设 n 边形的直径为 1，则 $S\leqslant(n/2)\cos(\pi/n)\operatorname{tg}(\pi/2n)$.

4. 设 n 边形的边长为 a_k，周长 $L=2p=\sum a_k$，则

(1) $\dfrac{2n}{n-1}\sum\limits_{k<j}a_ka_j\leqslant L^2\leqslant 4\sum\limits_{k<j}a_ka_j$.

(2) $\dfrac{(n-1)^2}{(L-a_k)(2n-3)}\leqslant\sum\limits_{\substack{i=1\\ j\neq k}}^{n}\dfrac{1}{L-a_j}\leqslant\dfrac{n+1}{L-a_k}$.

见[381]1980:6 和 1981:28－29.

(3) 设 H 表示边长为 1 的正 n 边形，其内角为 $\theta(n\geqslant 4)$，若 K 是内接于 H 的任意 n 边形，其边长为 $a_k, 1\leqslant k\leqslant n$，则

$$n(1-\cos\theta)/2\leqslant\sum a_k^2\leqslant n(1-\cos\theta).$$

见[305]1987,94:459－460.

(4) 设 $A_1,\cdots,A_{n-1}$ 是直径 $A_0A_n=2R$ 的半圆周上的 $n-1$ 个点，依次连结 A_0A_1, $A_1A_2,\cdots,A_{n-1}A_n$，记 $A_{k-1}A_k=a_k$，$(1\leqslant k\leqslant n)$，则

$$\sum a_k^2\geqslant 2nR^2(1-\cos(\pi/n)).$$

提示：从 $a_k=2R\sin(\theta_k/2)$ 得 $a_k^2=2R^2(1-\cos\theta_k)$，对 k 求和并利用

$$\frac{1}{n}\sum\cos\theta_k\leqslant\cos\left(\frac{1}{n}\sum\theta_k\right),\quad 0\leqslant\theta_k\leqslant\pi.$$

5. **安振平猜想**：设 $a_1,\cdots,a_n$ 是圆外切 n 边形的边长，$t\geqslant 2$，证明或否定

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^ta_{k+1}(a_k-a_{k+1})\geqslant 0,$$

式中 $a_{n+1}=a_1$，当 $n=3$ 时就是 Catalen 不等式，见 §1N.19，而 $n=4, t=2$ 时已为安

振平证明. 见本节 N.20(2) 和[348]1991,8:21 – 24.

6. 设 x_k 是多边形内一点到顶点 A_k 的距离. 1988 年刘健证明:

$$\sum (a_k + a_{k+1}) x_{k+1} \geqslant 4S\sec(\pi/n),$$

式中 $A_{n+1} = A_1$, 仅当该多边形为等边且多边形内一点为其中心时等号成立. 见[350]1988,2.

7. 对于每个闭凸曲线 C,存在一个最大面积为 S_n 的内切 n 边形 K_1 和最小面积为 σ_n 的外接 n 边形 K_2,使得

$$(\sigma_n - S_n)/\sigma_n \leqslant [\sin(\pi/n)]^n.$$

设 C 的面积为 S, K_1, K_2 的周长分别为 l_n, L_n,则

$$(L_n - l_n)/L_n \leqslant 2[\sin(\frac{\pi}{2n})]^2; \quad S_n \geqslant S(\frac{n}{2\pi})\sin\frac{2\pi}{n}.$$ (见[19]459)

8. 设 A_k 是凸 n 边形的内角,则对任意正数 t,有

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{-t} \geqslant n^{t+1}[(n-2)\pi]^{-t}.$$

(谭登林,[345]1994,8:37)

(二) 凸 n 边形不等式

设(平面)凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 a_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, $A_{n+1} = A_1$, $a_{n+1} = a_1$,,面积为 S, $L_t(a) = \sum a_k^{2t}$, $t = 1/2$ 时为周长 $L = 2p = \sum a_k$. G 为该多边形内部或边界上一点,$\angle A_kGA_{k+1}$ 的平分线与边 A_kA_{k+1} 交于 B_k,记 $x_k = GA_k$, $y_k = GB_k$, h_k 表示 G 与 A_kA_{k+1} 边的距离. 凸多边形所包含的圆中面积最大的圆称为内极圆;包含凸多边形的面积最小的圆称为外极圆或覆盖圆. 它们的半径分别记为 r, R. 特别,对于双圆多边形, r, R 就是它的内切圆与外接圆的半径.

1. [IMO]. 设 l 是凸 n 边形($n > 3$)所有对角线长之和,则其边的算术平均小于对角线的算术平均,而且

$$n - 3 < l/p < [\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}] - 2,$$

式中$[x]$是不超过 x 的最大整数.

注 这是 25 届 IMO 试题. 它的背景是 Popoviciu 在 1933 年证明的左边不等式,而右边不等式是他提出的两个猜想. 详细证明见[38]P892 – 893.

2. 若 G 在凸 n 边形内部,则

$$p < \sum GA_k < (n-1)p.$$

3. (1) $r \leqslant S^{1/2}[n\,\mathrm{tg}(\pi/n)]^{-1/2} \leqslant R\cos(\pi/n)$.

(童林,"中学数学"1994,6:15)

(2) $(nr)\mathrm{tg}(\pi/n) \leqslant \sqrt{(nS)\mathrm{tg}(\pi/n)} \leqslant p \leqslant (nR)\sin(\pi/n)$. {等正}. 由此推出**双圆 n 边形欧拉不等式**(又称为 **Chapple-Euler 不等式**):

$$R \geqslant r\sec(\pi/n).$$

杨世国猜想：$R^2 \geqslant r^2\sec^2(\pi/n)+OG^2$ {等正}，式中 O,G 分别是双圆 n 边形的外心和内心．见[350]1990，4：41－42．1994 年柳锋祥证明了这个猜想．(见"中学数学教学参考"，1994．8：35)

4． 设 $A_n(x),A_n(h)$ 和 $H_n(x),H_n(h)$ 分别是 $x=(x_1,\cdots,x_n),h=(h_1,\cdots,h_n)$ 的算术平均和调和平均，则

$$A_n(x)\geqslant A_n(h)\sec(\pi/n);\quad H_n(x)\geqslant A_n(h)\sec(\pi/n).$$

见[348]1989，5：3－4．

5． $R^2\geqslant 4\sqrt{3}S/[9(n-2)]$．

6． 关于 $L_t(a)=\sum a_k^{2t}$ 的不等式：

(1) $4nr^2\mathrm{tg}^2(\pi/n)\leqslant L_1(a)\leqslant 9R^2$； {等正}

(2) 1989 年简超将 Finsler 不等式推广为：

$$L_t(a)\geqslant n\left(\frac{4S}{n}\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{n}\right)^t+\frac{1}{n}\sum_{j<k}(a_j^t-a_k^t)^2. \quad \text{\{等正\}}$$

式中 $t\geqslant 1$．由此推出 $L_1(a)\geqslant 4S\mathrm{tg}(\pi/n)$．

当 $n=4$，a_1,a_3 为对边，则

$$L_1(a)\geqslant 4S^t+\frac{1}{2}\sum_{j<k}(a_j^t-a_k^t)^2,$$

仅当四边形为矩形时等号成立．见[348]1989，12．和 1988，6．1988，10．

1991 年杨学枝证明：设 $0<\beta_k<\pi,1\leqslant k\leqslant n$，且 $\sum\beta_k=\pi$，则 $\sum a_k^2\mathrm{ctg}\beta_k\geqslant 4S$．仅当该凸 n 边形有外接圆且所有 $(a_k/\sin\beta_k)=2R$ 时等号成立．见[348]1991，6：41．

设 d 表示双圆 n 边形的圆心距，钱义光证明：

$$R^2\geqslant d^2+r^2\sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

并进一步问：使 $R^m\geqslant d^m+r^m\left(\sec\frac{\pi}{n}\right)^m$ 成立的最小的 m 是什么？见[31]P．256－257．

(3) 若 $t\leqslant\dfrac{\log n-\log(n-1)}{\log\sin\frac{\pi}{n-1}-\log\sin\frac{\pi}{n}}$，则 $\sum a_n^t\leqslant n[2R\sin(\pi/n)]^t$．

见[348]1991，6：40－41．

7． **B-L 不等式(Barrow-Lenhard 不等式)**：

$$\sum x_k\geqslant\left(\sum y_k\right)\sec(\pi/n). \tag{1}$$

1988 年王振、陈计对(1)作了指数推广：

$$\sum x_k^t\geqslant\left(\sum y_k^t\right)\sec^t(\pi/n)\ (0<t\leqslant 1). \tag{2}$$

林祖成则证明当 $t>1$ 时，有

$$\sum x_k^t>\left(\sum y_k^t\right)\sec(\pi/n). \tag{3}$$

问题：当 $-1\leqslant t<0$ 时，(2)是否反向成立？而当 $t<-1$ 时，是否成立

$$\sum y_k^t>\left(\sum x_k^t\right)\sec(\pi/n)?$$

1989 年王振、陈计对(2)式作了加权推广:若 $\lambda_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant n, 0 < t \leqslant 1$,则

$$\sum \lambda_k x_k^t \geqslant (\sec\frac{\pi}{n}) \sum \frac{\lambda_k \lambda_{k+1}(x_k^t + x_{k+1}^t)}{\lambda_k x_k^t + \lambda_{k+1} x_{k+1}^t} y_k^t$$

见[348]1988,12:1989.6.[350]1992,5:31 - 33.

8. 若 G 是凸 n 边形所在平面上任一点,则 $\sum x_k^2 \sin A_k \geqslant 2S$.仅当 G 为正 n 边形的中心时等号成立.见[348]1988,9:3 - 5.

1991 年蒋明斌提出:若 G, Q 是凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 所在平面上的两点,记 $x_k = GA_k, z_k = QA_k, 1 \leqslant k \leqslant n$,是否成立

$$\sum x_k z_k \sin A_k \geqslant 2S? \qquad 见[348]1991,6:42.$$

Janic,R.R,证明

$$\sum x_k \sin(A_k/2) \geqslant \sum h_k.$$

仅当凸 n 边形的所有边与以 G 为圆心的一圆相切时等号成立,证明见[3]16.13.

于是可进一步问:$\sum x_k^2 \sin(A_k/2)$ 与 $\sum x_k z_k \sin(A_k/2)$ 的下界是什么?

9. 设 S_1 为内接于单位圆的凸多边形的面积,S_2 为外切多边形的面积,该多边形的切点与内接多边形的顶点重合,则 $S_1 + S_2 \geqslant 6$. {等正}

10. 若取凸 n 边形各边中点所组成的另一凸 n 边形的面积为 S_1,则当 $n \geqslant 6$ 时,有 $1/2 < S_1/S \leqslant 1$,而当 $n = 5$ 时,上界 1 可改进为 3/4.见[348]1989,7:36.

11. $\sum \dfrac{1}{a_k} \geqslant \dfrac{n}{R\sqrt{2 - 2\cos(2\pi/n)}}$.

12. Mitrinovic-Pecaric 证明:

$$\prod (y_k + y_{k+1}) \leqslant [2\cos(\pi/n)]^n \prod x_k.$$

1991 年王振、陈计证明:若 $0 < t \leqslant 1$,则

$\sum (y_k + y_{k+1})^t \leqslant [2\cos(\pi/n)]^t \sum (x_k^t)$,并提出三个猜想:

(1) $\sum x_k^t \geqslant (\sec\frac{\pi}{n}) \sum y_k^t + n[(\sec\frac{\pi}{n})^t - \sec\frac{\pi}{n}] \cdot (\prod y_k)^{t/n}, t \geqslant 1$;

(2) $E_m(x) \geqslant [\sec(\pi/n)]^m E_m(y)$;

(3) $E_m(y_k + y_{k+1}) \leqslant [2\cos(\pi/n)]^m E_m(x)$,式中 $E_m(x) = \sum x_{j_k}$,求和指标 j_k 满足 $1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_m \leqslant n, 1 \leqslant m \leqslant n$.见[348]1991,7:28 - 29.

13. **凸 n 边形 C-B 角不等式**:若 G 在凸 n 边形内,使得 $\angle GA_1A_2 = \angle GA_2A_3 = \cdots = \angle GA_nA_1 = \omega_n (n \geqslant 3)$,则 $\omega_n \leqslant [(1/2) - (1/n)]\pi$ {等正}.见[348]1989,9.但曾登高等提出,对于一般凸多边形,C-B 点不一定存在.若令 $\angle GA_kA_{k+1} = \alpha_k, 1 \leqslant k \leqslant n, A_{n+1} = A_1$,则 $\min\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \leqslant [(1/2) - (1/n)]\pi$.并提出两个猜想:$(\prod \alpha_k)^{1/n} \leqslant [(1/2) - (1/n)]\pi$;$\sum (2\alpha_k)^t \geqslant \sum A_k^t \quad (-1 \leqslant t < 0)$.见[348]1992,4:41.

14. 设 a_k, S_1, b_k, S_2 分别是两个 n 边形的边长和面积.令 $c_k = (a_k^p + b_k^p)^{1/p}, p \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n$,则当 $2 \leqslant p \leqslant 4$ 时,以 c_k 为边长的 n 边形的最大面积 S 满足

$$S^{p/2} \geqslant S_1^{p/2} + S_2^{p/2}.$$

但当 $p > 4$ 时上式不成立,而 $1 \leqslant p < 2$ 时,不知上式是否成立.

(陈计,宁波大学学报 1991,4(1):17 - 20)

15. 设两个凸 n 边形的边长分别为 a_k, b_k 且 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$,面积分别为 S_1, S_2,若 f, g 是$[0,\infty)$上两个递增的凸函数,则

$$\sum_j g(b_j)[-f(a_j) + \sum_{k\neq j} f(a_k)] \geqslant n(n-2) f\left(\sqrt{\frac{4S_1}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right) g\left(\sqrt{\frac{4S_2}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\right).$$

特别取 $f(x) = g(x) = x^t,\ t > 1$,得

$$\sum_j b_j^t(-a_j^t + \sum_{k\neq j} a_k^t) \geqslant n(n-2)\left[\frac{16S_1S_2}{n^2}\operatorname{tg}^2(\pi/n)\right]^{t/2}.$$

(见[19]365 - 366)这是三角形 N-P 不等式的推广.

16. **凸 n 边形内角不等式:**

(1) $(\prod \sin A_k)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum \sin A_k \leqslant \sin\frac{2\pi}{n}$;

(2) $[\prod \cos(\frac{A_k}{2})]^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum \cos\frac{A_k}{2} \leqslant \sin\frac{\pi}{n}$;

(3) $(\operatorname{tg}\frac{\pi}{n})(\sum \operatorname{tg}\frac{A_k}{2}) \geqslant n$.

(三) 正 n 边形不等式

下面的多边形均为正 n 边形,记号同(二).

1. [MCM].若 G 在正 n 边形内部,则至少有一个角 A_jGA_k 满足

$$\pi(1 - 1/n) \leqslant A_jGA_k \leqslant \pi.$$ 见[99]13,22 - 24.

2. $\pi(rR^2)^{1/3} < p < (\pi/3)(r + 2R)$.

3. 设 d_k 是正 n 边形外接圆上一点到 A_k 的距离,则

(1) $\sqrt{2n}R \leqslant \sum d_k \leqslant \sqrt{2}(nR)$;

(2) $2R\operatorname{ctg}(\pi/2n) \leqslant \sum d_k \leqslant 2R\csc(\pi/2n)$.

见[331]1967:181 - 196,67 - 68.

4. $\sum h_k \geqslant \sqrt{3}na/6$.式中 a 为正 n 边形的边长.

提示:$\frac{1}{2}a\sum h_k = \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n} \geqslant \frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$.

5. 给定半径为 R 的圆 C.设 p_n 为 C 的内接正 n 边形的周长,q_n 为 C 的外切正 n 边形的周长,则

(1) $\{p_n\}$ 递增而 $\{q_n\}$ 递减; (2) $p_n < 2\pi R < 2p_n/3 + (q_n/3)$;

(3) $p_n + q_n > 4\pi R$.

四、 四面体不等式

设四面体 $ABCD$ 的棱长为 $a_k(1 \leqslant k \leqslant 6)$,体积为 V,侧面积为 S_k,三对对棱之间的距离为 $d_k(1 \leqslant k \leqslant 3)$,外接球半径为 R,内切球半径为 r,高为 h_j,中线为 $l_j(1 \leqslant j \leqslant 4)$.

1. $R\geqslant 3r$(欧拉不等式){等正}.

2. **棱长不等式:**

(1) $12\sqrt{6}r\leqslant\sum a_k\leqslant 4\sqrt{6}R$; (2) $144r^2\leqslant\sum a_k^2\leqslant 16R^2$;

(3) $360r^2\leqslant\sum\limits_{j<k}a_jb_k\leqslant 40R^2$; (4) $\sum a_k^3\geqslant 36\sqrt{2}V$;

(5) $\sum a_k^{-1}\geqslant 3\sqrt{6}/(2R)$;

以上(1)至(5)均为{等正},即仅当四面体为正四面体时等号成立.

(6) 若 $\beta_k(1\leqslant k\leqslant 6)$ 是四面体的相交于相应棱处的两个面所夹角(弧度数),则

$$\pi/3<\sum(a_k\beta_k)/(\sum a_k)<\pi/2.$$

其中的上下界都是最优的.见[36]Vol.2,201,[348]1987,6:5-7.

(7) $\frac{1}{6}\leqslant\frac{\sum a_k^2}{(\sum a_k)^2}\leqslant\frac{1}{3}$.(王庚,[32]162-166)

(8) 设侧面 S_k 的外接圆半径为 R_k,王卫东证明

$$\prod_{k=1}^{4}(R^2-R_k^2)\leqslant(\frac{8}{3})^8. \qquad \text{\{等正\}}$$

并进一步猜想:$\sum\limits_{k=1}^{4}R_k^2\leqslant\frac{32}{9}R^2$.(见[350]1994,2:44)

(9) $\sum a_k\geqslant 4\times 3^{5/3}\cdot V^{2/3}$. {等正}

谭志中对上式作了改进,见[350]1994,4.

(10) $\frac{6}{5^\lambda}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{6}\left(\frac{a_k}{a-a_k}\right)^\lambda<\frac{3}{2^\lambda}$.式中 $\lambda\geqslant 1$,$a=\sum\limits_{k=1}^{6}a_k$.仅当正四面体时等号成立.(吴善和,石焕南,"福建中学数学教学"2003,5:20)

3. **体积不等式:**

(1) $8\sqrt{3}r^3\leqslant V\leqslant 8\sqrt{3}R^3/27$. (2) $V\leqslant\frac{\sqrt{3}}{24R}(\prod a_k)^{2/3}$;

(3) $72V^2\leqslant\prod a_k\leqslant 512R^6/27$.

(1)~(3)均为{等正}.证明见[345]1981,6:29-30,1984,12:24-25.推广见[350]1986,2:11-13.其中杨路利用 Cayley-Menger 行列式的证明技巧值得注意.

(4) [MCM].若四面体只有一条棱大于1,则 $V\leqslant 1/8$.证明见[38]P.1197.

(5) [MCM]若四面体的顶点在体积为1的圆柱上,则该四面体的体积 $V\leqslant 2/(3\pi)$

(6) [MCM]若 $ABCD$ 为直角四面体,则

$$162V\leqslant(5\sqrt{2}-7)(\sum a_k)^3.$$

见苏化明[99]1989,5:37-52.

(7) 若四面体存在棱切球(即与四面体的六条棱都相切的球),棱切球的半径记为 R_t,则

$$R\geqslant\sqrt{3}R_t;\ V\leqslant\frac{(\prod a_k)^{2/3}}{24R_t};\ \sum a_k^2\leqslant 15R^2+3R_t^2;$$

$8r^2R_t \leqslant V \leqslant \frac{8}{9}R^2R_t \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$.均仅当正四面体时成立等号.

见林祖成,朱火芬.[32]P.175 - 187.林朱并提出猜想:$R_t \geqslant \sqrt{3}r$.

(8) $V \leqslant \frac{2^{3/2}}{3^{7/4}}(\prod_{k=1}^{4} S_k)^{3/8}$; $\sum S_k \geqslant 6\sqrt[6]{3}V^{2/3}$. {等正}

([36]P855)

(9) 以四面体的内切球在四个面上切点为顶点的四面体的体积

$V_1 \leqslant \frac{1}{27}V$. ([36]P.840)

(10) 设 $\lambda_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant 4$,则

$$54\sqrt{3}V^2\sum\lambda_1\lambda_2\lambda_3S_4 \leqslant (\sum\lambda_k)^3\prod S_k,$$

仅当所有 λ_k 相等且为正四面体时等号成立.

(唐立华,冷岗松,福建中学数学,1992.1)

4. [MCM].设四面体的一组相对棱之长为 a_j, a_k,则

$$r < \frac{a_ja_k}{2(a_j + a_k)}; \quad r < \frac{(a_j + a_k)}{8}.$$

提示:设 h 是包含 a_j, a_k 的两条异面直线之间的距离,作平行六面体.使内接于四面体,并且 a_j, a_k 分别为六面体上下底面的棱.于是该六面体的体积为 $6V$.设 S 为四面体的表面积,于是从 $S > h(a_j + a_k), V \leqslant ha_ja_k/6, V = rS/3$ 即可得证.见[38]P.1106 - 1107.

5. [MCM].(1) 设 d 是四面体两条异面棱之间的最小距离,h 是该四面体的最小高,则 $h < 2d$.(见[38]P1214)

(2) 若四面体(V_1)的顶点在四面体(V_2)的内部或棱面上,则(V_1)的棱长之和小于(V_2)棱长之和的 3/4 倍.

(3) 设 E、F、G 分别在四面体 $ABCD$ 的棱 AB、AC、AD 上,则 ΔEFG 的面积、周长都不超过 ΔABC、ΔABD、ΔACD、ΔBCD 的面积和周长中的最大者.

6. 设四面体以 a_k 为棱的二面角记为 $\theta_k(1 \leqslant k \leqslant 6)$.则

(1) $\sum(\sin\theta_k)^2 \leqslant \frac{16}{3}$; (2) $\sum\cos\theta_k \leqslant 2$. {等正}

7. 设在四面体 $ABCD$ 中,以同一侧面 ABC 的三边为棱的二面角记为 α、β、γ,则

(1) 若 $ABCD$ 为直角四面体,即 DA、DB、DC 相互垂直,则

$$\prod\cos\alpha \leqslant \sqrt{3}/9.$$ (见[38]P.1211)

(2) 若 $ABCD$ 是等侧面四面体,则

$$\prod\cos\alpha \leqslant 1/27; \sum\cos^2\alpha \geqslant 1/3.$$

8. 设 $ABCD$ 是等腰四面体,即 $BC = AD, AC = BD, AB = CD$.若 AB、AC、AD 和 ΔBCD 所在平面成角 α, β, γ,则

$$\sum\sin\alpha\sin\beta \leqslant 2.$$

见[345]1983,6:25,直角四面体的其他不等式见石焕南的文章[100]P.343－348.另见[348]2001,3等.

9. **四面体中线、高、侧面积等元素不等式:**

(1) $16r \leqslant \sum l_j \leqslant 16R/3$.

(2) $64r^2 \leqslant \sum l_j^2 \leqslant 64R^2/9$.

(3) $96r^2 \leqslant \sum\limits_{j<k} l_j l_k \leqslant 32R^2/3$.

以上 l_j 可换成 h_j $1 \leqslant j \leqslant 4$.

(4) 若 S_j 是与 h_j 相对应的侧面积,则

$$24\sqrt{3}r^2 \leqslant \sum S_j \leqslant 8\sqrt{3}R^2/3;\quad \sum \frac{1}{S_k} \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{9r^2}.$$

(5) $\prod h_j \geqslant 256r^4$.

(6) [MCM]. 设 $r_j(1 \leqslant j \leqslant 4)$ 是四面体各面的内切圆半径,若四面体的对棱之和为1,则 $\sum r_j \leqslant \sqrt{3}/3$.

(7) 若四面体各面的旁切球半径为 $R_j(1 \leqslant j \leqslant 4)$,则

$$\sum\left(\frac{R_j}{h_j}\right) \geqslant 2;\ \sum\left(\frac{h_j}{R_j}\right) \geqslant 8;\quad \sum_{j<k}\frac{R_jR_k}{h_jh_k} \geqslant \frac{3}{2};\sum_{j<k}\frac{h_jh_k}{R_jR_k} \geqslant 24.$$

(1)～(7)均为{等正}.见[345]1982,7.[350]1991,4.

(8) $\sum\limits_{j=1}^{4} l_j \geqslant \frac{8\sqrt{3}}{9}\sum\limits_{k=1}^{3} d_k$.

陈计提出,唐立华证明并推广为:

设 Q 为四面体 $ABCD$ 内任一点,Q 到顶点的距离记为 $D_k(1 \leqslant k \leqslant 4)$,则

$$\left(\sum_{k=1}^{4} D_k\right)^2 \geqslant 4\sum_{k=1}^{3} d_k.$$

仅当 $ABCD$ 为等面四面体且 Q 为其外心时等号成立,唐立华还进一步提出两个猜想.

见[100]P363－368.

(9) 当 $ABCD$ 为等面四面体时,成立 $\sum\limits_{k=1}^{3}\frac{1}{d_k^2} \geqslant \frac{1}{4r^2}$.

苏化明,中学数学(湖北)1993.4.

(10) $\frac{4}{9} < \frac{\sum l_j}{\sum a_k} < \frac{2}{3}$.(胡跃宗、赵有为[32]P.167－170)

(11) $(\sum S_k)^2 - \frac{4}{3}(\sum S_k^2) \geqslant 2\sqrt{2}V(\sum a_k)$.

由此推出

$$(\sum S_k)^2 \geqslant 3\sqrt{2}V(\sum a_k);\quad (\sum S_k) \geqslant \sqrt{2}r(\sum a_k);\quad V \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}r^2(\sum a_k);$$

见杨克昌[32]P.286.

(12) 四面体各棱与其对棱中点所成的面称为中线面,其面积记为 S_k^*,$(1 \leqslant k \leqslant$

6),则

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{S_k^*}\leqslant\frac{4\sqrt{6}R}{3V}.\quad([345]1996,4:48)$$

(13) 设四面体内一点 Q 到四个面的距离为 d_k^*,则

$$\sum\left(\frac{1}{d_k^*}\right)^2\geqslant 2\left(\frac{9}{R^2}+\frac{1}{r^2}\right).$$

仅当 Q 为正四面体中心时等号成立.(冷岗松等.[31]P.263 - 265)

唐立华、冷岗松还证明:

$$\sum\left(\frac{1}{d_k^*}\right)^2>3\sqrt{3}\sum\frac{1}{S_k};\quad \sum\frac{1}{d_k^*}\geqslant(6\sqrt{3})^{1/2}\sum\left(\frac{1}{S_k}\right)^{1/2};$$

$$\left(\sum\frac{1}{d_1^*d_2^*}\right)^2\geqslant 432\sum\frac{1}{S_1S_2}.$$

见[348]1994.6:23 - 24.

(14) **Nesbitt 不等式:**设 $\lambda\geqslant 1$,令 $S=\sum_{k=1}^{4}S_k$,则

$$\frac{4}{3^\lambda}\leqslant\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{S_k}{S-S_k}\right)^\lambda<2.$$

(吴善和,石焕南,"福建中学数学",2003,5:20)

10. 设 K、Q 是正四面体 $ABCD$ 内任意两点,则 $\cos\angle KQA>1/2$.

11. [MCM].在四面体 $ABCD$ 中,$\angle BDC$ 是直角,D 到平面 ABC 的垂线足 H 是 ΔABC 的垂心,则

$$(AB+BC+CA)^2\leqslant 6(AD^2+BD^2+CD^2),$$

仅当 ΔABC 是正三角形时等号成立(IMO12).证明见[38]P1198.

12. **涉及两个四面体的不等式:**设四面体 $A'B'C'D'$ 的元素用 $ABCD$ 相应元素加"′"表示.1982 年苏化明证明.

(1) $144rr'\leqslant\sum a_ka'_k\leqslant 16RR'$.

式中左边等号仅当两个四面体均为正四面体时成立;右边等号仅当两个四面体对应棱长成比例且每一四面体的三对对绫相等时成立.

(2) $64rr'\leqslant\sum h_jh'_j\leqslant\sum l_jl'_j\leqslant 64RR'/9$.

式中左边等号仅当每一四面体的各侧面面积相等时成立;中间等号仅当两个四面体均为正四面体时成立;右边等号仅当两四面体的对应中线成比例且每一四面体的三对对棱相等时成立.1991 年杨世国又对有关不等式作了加权推广.见[345]1982,7:31 - 33,10.[350]1991,3:36 - 39.

五、 长方体不等式

设长方体的棱长为 a,b,c,对角线长为 l,全面积为 S,体积 V,对角线与相邻三条棱的角为 α,β,γ.

1.　$S \leqslant 2l^2$；　$V \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9} l^3$.

2.　[MCM].若 $a < b < c$,则 $a < \frac{1}{3}\left(a + b + c - \sqrt{l^2 - \frac{S}{2}}\right) < c$.

3.　$\sum a \leqslant \sqrt{3} l$.

4.　$\sum a^3 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} l^3$.

5.　$\sum \left(\frac{l}{a}\right)^2 \geqslant 9$.

6.　$\sum \cos\alpha \leqslant \sqrt{3}$；　$\sum (\cos\alpha)^3 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.　$\sum \cos\alpha\cos\beta \leqslant 1$.

8.　$\sum \sin\alpha \leqslant \sqrt{6}$；　$\sum (\sin\alpha)^3 \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

9.　$\sum \sin\alpha\sin\beta \leqslant 2$.

10.　$\prod \cos\alpha \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9}$.

11.　$\prod \sin\alpha \leqslant \frac{2\sqrt{6}}{9}$.

12.　$\sum \left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 \geqslant \frac{9}{2}$；$\sum \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 \geqslant 9$.

(以上见刘国杰,中学数学教学(安徽),1993,3:24)

六、　棱锥、多面体不等式

1.　设正 n 棱锥的外接球半径和内切球半径分别为 R,r,则

$$R \geqslant r[1 + \sec(\pi/n)].$$ (见[350]1990,4:42)

2.　[MCM].(1) 正四棱锥的相邻两个侧面所成的二面角大于 $\pi/2$ 而小于 π.

(2)　任何一个三面角,其任一面角小于其他两个面角之和;三个二面角之和必大于 π 而小于 3π.

(3)　任何一个凸多面体,其所有面角之和小于 2π,其所有二面角之和大于 $(n-2)\pi$,其中 n 是该多面体的面数.

七、　n 维单形不等式

n 维欧氏空间 R^n 中子集 E 的任两点连线仍在 E 中,称 E 为凸体.包含 R^n 中 $n+1$ 个点 $A_1,\cdots,A_{n+1}$ 的最小凸体,称为由 $\{A_1,\cdots,A_{n+1}\}$ 张成的 n 维单形(n - simplex),记为 $\sum(A)$.若 A_k 的坐标为 $(x_{k1},\cdots,x_{kn})(1 \leqslant k \leqslant n+1)$,则 $\sum(A)$ 的体积 $V(A) = V(A_1,\cdots,A_{n+1})$ 为

$$V(A) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & 1 \\ \cdots & & & & \\ x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & \cdots & x_{n+1,n} & 1 \end{vmatrix}.$$

当 $n \neq 0$ 时，n 维单形有两个定向，用顶点的顺序给出．注意彼此相差一个偶排列的两个顺序代表同一个定向．

0 维单形就是一点，1 维单形是一条线段，2 维单形是三角形，3 维单形是四面体．n 维单形可看成有 $n+1$ 个顶点的广义四面体．所以，尝试将三角形、四面体不等式推广到 n 维单形上去，是近来研究的一个热点，下面设 $n \geqslant 2$．在 R^n 中任取一点 M，记

$$V_k = V(A_1, \cdots, A_{k-1}, M, A_k, \cdots, A_{n+1}).$$

体积的比值 $V_1 : V_2 : \cdots : V_{n+1} = \mu_1 : \mu_2 : \cdots : \mu_{n+1}$ 称为点 M 的重心坐标，记为 $M(\mu_1, \cdots, \mu_{n+1})$．令 $\lambda_k = \mu_k / \left(\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j\right)$，则 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1})$ 称为 M 的重心规范坐标．$n = 2,3$ 时的重心规范坐标就是有限元方法中的面积坐标和体积坐标，$\sum(A)$ 的内切球和各侧面的切点记为 B_k，$1 \leqslant k \leqslant n+1$，则 $\sum(B)$ 称为 $\sum(A)$ 的切点单形，$\sum(A)$ 的外接球半径记为 $R(A)$，内切球半径记为 $r(A)$．$\sum(A)$，$\sum(B)$ 的棱长分别记为 $a_k, b_k (1 \leqslant k \leqslant m)$，式中

$$m = \binom{n+1}{2} = n(n+1)/2.$$

以 $\{A_1, \cdots, A_{k-1}, A_{k+1}, \cdots, A_{n+1}\}$ 为顶点的 $n-1$ 维单形 F_k 的体积记为 V_k，F_k 所在的 $n-1$ 维超平面仍记为 F_k．

（一）体积不等式

1．**Veljan 不等式**：

$$V(A) \leqslant \frac{1}{n!}\left(\frac{n+1}{2^n}\right)^{1/2}\left(\prod a_k\right)^{\frac{2}{n+1}}.$$

提示：用数学归纳法．

2．**Korchmaros 不等式**：

$$V(A) \geqslant \frac{[n^n (n+1)^{n+1}]^{1/2}}{n!}[r(A)]^n.$$

3．$V(A) \leqslant \left(\frac{n}{2^{n+1}}\right)^{1/2} \frac{1}{n! R(A)}\left(\prod a_k\right)^{2/n}$；

当单形的外心在其内部时，有

$V(A) \leqslant \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n! n^{n/2}}(R(A))^n$．（杨世国、王佳，见[32]P.294－295）

4．（1）$V(A) \leqslant (n+1)^{1/2}\left(\frac{[(n-1)!]^2}{n^{3n-2}}\right)^{\frac{1}{2(n-1)}}\left(\prod V_k\right)^{\frac{n}{n^2-1}}$，

仅当正则单形时等号成立．（张景中，杨路，中国科技大学学报，1981，2:1－8）

(2) $V(A) \geqslant \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot n^{\frac{n^2-2}{2n}}}{n!}[R(A)]^{1/n}[r(A)]^{(n^2-1)/n}$.

仅当$\sum(A)$为正则单形时等号成立.见杨世国,河西学院学报 2002,18(2):9 - 12.

(3) 设 $p,q>0$ 且 $p+q\geqslant 1$,则

$$V(A) \leqslant \frac{1}{n}\left[(n-1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n-1}}(n+1)^{\frac{p}{2(n-1)q}} \times \left(\frac{\prod V_k^{2q}}{\sum V_k^{2q}}\right)^{\frac{1}{2(n-1)q}}.$$

仅当$\sum(A)$为正则单形且 $p+q=1$ 时等号成立.(张晗方[344]2002,32(1):85 - 90)

5. $V(B) \leqslant \frac{1}{n^n}V(A)$.仅当$\sum(A)$为正则单形时等号成立.

6. $V(A) \leqslant \frac{1}{n!}[n^n(n+1)^{n+1}]^{1/2}(\sum l_k)^n$.

7. 设$\sum(A)$的棱 a_k 与 a_j 之间的夹角为 α_{kj} 则

$$V(A) \leqslant \frac{1}{n!}\left(\prod a_k\right)\left(\sin\frac{\sum_{k<j}\alpha_{kj}}{\binom{n}{2}}\right)^{n-1}$$

(冷岗松[339]1990,4:522 - 523)

(二) $R(A)$ 与 $r(A)$ 的关系不等式

1. **Euler 不等式**:$R(A)\geqslant nr(A)$,仅当$\sum(A)$为正则单形时等号成立.

1985 年,Klamkin 将上式改进为

$$[R(A)]^2 \geqslant [nr(A)]^2 + d^2.$$

式中 d 为单形$\sum(A)$的内心与外心间的距离.1995 年,冷岗松证明:

$$[R(A)]^2\sin\theta \geqslant [nr(A)]^2,$$

其中 θ 是单形$\sum(A)$对棱夹角的均值.见[344]1995,2:94 - 96.

2000 年,沈文选、冷岗松证明:

$$[R(A)]^2 \geqslant \frac{[nr(A)]^2}{\sin\theta} + d^2;\quad [R(A)]^2 \geqslant \frac{[nr(A)]^2}{\sin\theta} + d_0^2.$$

式中 d,d_0 分别是$\sum(A)$的外心与内心,外心与重心之间的距离,仅当$\sum(A)$为正则时等号成立.见湖南师大学报 2000,23(2).

2. $R(A)\geqslant nR(B)$; $r(A)\geqslant nr(B)$.

3. $\sum a_k^2 \leqslant (n+1)^2[R(A)]^2$.

仅当单形的重心 M 与它的外接球心重合时等号成立.

(三) 单形其他元素不等式

1. 设$\sum(A)$的重心为 G,GA_k 与$\sum(A)$的外接球面交于 B_k,令 $t_k=A_kB_k$,则

$$\sum t_k \geqslant 2\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{1/2}\sum a_k;\quad \sum t_k^2 \geqslant \left(\frac{4}{n+1}\right)\sum a_k^2.$$

(苏化明,[342]1989,4(1):32 - 38)

我们问:当 $1<p<\infty$ 时,$\sum t_k^p$ 与$\sum a_k^p$ 有没有相类似的不等式?

2. 设 F_k 的单位法向量记为 e_k，令 $D_k = \det(e_1, \cdots, e_{k-1}, e_{k+1}, \cdots, e_{n+1})$，则 $\alpha_k = \arcsin|D_k|$ 称为 $\sum(A)$ 中顶点 A_k 所对应的顶点角，它满足高维边弦定理：

$$\sin\alpha_k = \frac{n^n[V(A)]^{n-1}}{n!\prod_{j\neq k} V_j}, \ (k = 1, \cdots, n+1).$$

(1) 对于任意 $x_k \geqslant 0$，$\sum_{k=1}^{n+1} x_k > 0$，成立

$$\sum_{k=1}^{n+1}\Big(\prod_{\substack{j\neq k\\ j=1}}^{n+1} x_j\Big)(\sin\alpha_k)^2 \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)^n.$$

由此推出

$$\sum_{k=1}^{n+1}(\sin\alpha_k)^2 \leqslant \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n; \quad \prod_{k=1}^{n+1}(\sin\alpha_k) \leqslant \Big[\frac{1}{n+1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big]^{\frac{n+1}{2}}.$$

以上两式仅当 $\sum(A)$ 为正则单形时等号成立. 见[382]1992,4:371 - 375.

张晗方则进一步证明：当 $p, q > 0$，$p + q \geqslant 1$ 时，成立

$\sum_{k=1}^{n+1}(\sin\alpha_k)^{2q} \leqslant (n+1)^p\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{nq}$，仅当 $\sum(A)$ 为正则单形且 $p + q = 1$ 时等号成立，见[344]2002,32(1):85 - 90.

(2) 若记 θ_{kj} 为单形 $\sum(A)$ 两个侧面 F_k, F_j 所成的角，$1 \leqslant k < j \leqslant n+1$，则

$$\sum_{k=1}^{n+1}(\sin\alpha_k)^2 \leqslant \frac{2}{n(n-1)}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n-2}\sum(\sin\theta_{kj})^2 \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

$$\prod_{k=1}^{n+1}\sin\alpha_k \leqslant \left[\frac{(n+1)^{n-2}}{(n-1)^n}\right]^{\frac{n+1}{4}}\prod\sin\theta_{kj} \leqslant \left[\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n+1}{2}};$$

仅当 $\sum(A)$ 为正则时等号成立.（苏化明，[344]1995,3:38 - 43）

$\forall \lambda_k \neq 0, 1 \leqslant k \leqslant n+1$，成立

$$\sum(\lambda_k\lambda_j\sin\theta_{kj})^2 \leqslant \left(\frac{n-1}{2n}\right)\Big(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k^2\Big)^2,$$

仅当所有 $\dfrac{S_kS_j}{\lambda_k^2\lambda_j^2\cos\theta_{kj}}$ 相等时等号成立.（马统一，[345]1994.12:30 - 32）

(3) 设 $\sum(A)$ 的两个侧面 F_k, F_j 的内角平分面面积为 F_{kj}，F_k 的面积仍记为 F_k，则

$$\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n+1} F_{kj} \leqslant \Big(\frac{n(n+1)}{8}\Big)^{1/2}\sum_{k=1}^{n+1} F_k; \quad \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n+1} F_{kj}^2 \leqslant \frac{n+1}{4}\sum_{k=1}^{n+1} F_k^2,$$

第一个不等式中仅当 $\sum(A)$ 为正则单形时等号成立，第二个不等式中仅当所有 F_k 相等时等号成立.（见苏化明[340]，1992,12(3):315 - 318）

3. 设 $\sum(A)$ 的外心 0 在其内部，由 $\{A_1, \cdots, A_{k-1}, 0, A_{k+1}, \cdots, A_{n+1}\}$ 张成的 n 维单形 $\sum_k$ 的外接球半径记为 R_k，内切球半径记为 r_k，苏化明证明

$$\prod_{k=1}^{n+1} R_k \geqslant \left[\frac{n}{2}R(A)\right]^{n+1},$$

杨世国推广为

$$\left(\prod_{k=1}^{n+1} R_k\right)/\left(\sum_{k=1}^{n+1} R_k\right) \geqslant \frac{1}{n+1}\left[\frac{n}{2}R(A)\right]^n,$$

仅当$\sum(A)$为正则单形时等号成立.杨世国并提出猜想:

$\prod_{k=1}^{n+1} r_k \geqslant \left[\frac{n}{2}r(A)\right]^{n+1}$.(见河西学院学报 2002,18(2):9 - 12.)

4.　设$\sum(A)$的顶点A_k所对面的高为h_k,该面外的旁切球半径为r_k,则

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{h_k}{r_k} \geqslant n^2 - 1;\quad \sum_{1\leqslant k1<\cdots<kn\leqslant n+1}\frac{h_{k1}\cdots h_{kn}}{r_{k1}\cdots r_{kn}} \geqslant \binom{n+1}{n}(n-1)^n.$$

仅当$\sum(A)$各侧面面积相等时等号成立.(林祖成[344]1994,2:50 - 56)

5.　设$\sum(A)$内部任一点Q到$\sum(A)$的侧面F_k的距离为d_k,则成立 **Gerber** 不等式:

$$\prod_{k=1}^{n+1} d_k \leqslant \frac{(n!)^{\frac{n+1}{n}}}{n^{\frac{n+1}{2}}(n+1)^{\frac{(n+1)^2}{2n}}}V^{\frac{n+1}{n}}.$$

仅当$\sum(A)$为正则单形且Q为其内心时等号成立.(见[313]1975,56:97 - 111)

2002 年杨世国推广了 Gerber 不等式:

$$\prod_{k=1}^{n+1} d_k \leqslant \left(\frac{(n!)^n V^n}{(n+1)^{\frac{(n^2+n)}{2}} n^{\frac{(n^2-2)}{2}} R}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

仅当$\sum(A)$为正则单形且Q为其内心时等号成立.(见“河西学院学报”2002,18(2):9 - 12)

(四)　联系两个单形的不等式

下面设$\sum(A)$,$\sum(B)$是任意两个单形,它们的棱长体积分别记为a_k,b_k,$V(A)$,$V(B)$.$m=\binom{n+1}{2}$.

1.　设$0<p\leqslant 1$,,则

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^{2p}\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^{2p} - nb_k^{2p}\right) \geqslant 2^{2p-2}n^2(n^2-1)\times\left(\frac{(n!)^2}{n+1}\right)^{\frac{2p}{n}}[V(A)V(B)]^{\frac{2p}{n}}.$$

仅当$\sum(A)$,$\sum(B)$均为正则单形时等号成立.(陈计、马援,[339]1989,9(2):282 - 284)

2.　设$0<p\leqslant 2$,则

$$\sum_{k=1}^{m} a_k^p\left(\sum_{j=1}^{m} b_j^p - 2b_k^p\right) \geqslant \frac{n(n+1)(n^2+n-4)}{8}\left(\frac{2^n(n!)^2}{n+1}\right)^{p/n}$$

$$\times\left[\left(\frac{\prod b_k}{\prod a_k}\right)^{\frac{2p}{n(n+1)}} V(A)^{\frac{2p}{n}} + \left(\frac{\prod a_k}{\prod b_k}\right)^{\frac{2p}{n(n+1)}} V(B)^{\frac{2p}{n}}\right],$$

仅当$\sum(A)$,$\sum(B)$均为正则时等号成立.(唐立华,冷岗松,[344]1995.2:80 - 85)

3.　单形不等式的其他近期新结果见孙明保,Geometriae Dedicate,2001,85:45 - 51,53 - 67,119 - 123 等.