第十七章　不等式常用证法 50 种

[144]P666. 指出，不等式是广泛使用的一种技巧性工具，但是在不等式的证明中，除了“$x^2\geqslant 0$”等极其一般的原理外，统一的方法不太多，而对同一个不等式能用几种方法来证明的情形则较多. 20 世纪 70 年代以来，大量新不等式的涌现和原有不等式的改进，自然伴随着不等式证明方法的增多，在此基础上就有可能进一步总结出各种普遍性证法. 本章只限于从本书所收入的不等式中，总结出 50 种有代表性的常用证法，其中大多数是大中学数学教学和各种数学竞赛中常用的. 其目的仅在于开拓读者的思路，因为这里并不能包括不等式极其丰富的证明方法与技巧. 对于较复杂的不等式，除了要注意多种证法的灵活使用外，还往往用到其他领域的方法技巧.

1.　**比较法**：$a>b$ 等价于 $a-b>0$；而 $a>b>0$ 等价于 $a/b>1$. 即 a 与 b 的比较转化为与 0 或 1 的比较. 使用比较法时，关键是要作适当变形，如因式分解、拆项、加减项、通分等，这是第三章中许多代数不等式的证明及其他各章初等不等式的证明所常用的证明技巧.

2.　**分析与综合法**：综合法是由已知条件和已知的不等式出发，推导出所要证明的不等式；分析法则是要逐步找出使结论成立的充分条件，最后归结为已知的不等式或已知条件. 对于条件简单而结论复杂的不等式，往往要通过分析法或分析法与综合法交替使用来寻找证明的途径. 还要注意：第一，要熟悉掌握第一章的基本不等式和后面各章中著名的不等式；第二，要善于利用题中隐含条件，例如第四章的几何不等式；第三，不等式的各种变形技巧. 例如第 1 章 §3 AG 不等式的各种证明技巧.

3.　**反证法**：设所要证的不等式不成立，从原不等式的结论的反面出发，通过合理的逻辑推理导出矛盾，从而断定所要证的不等式成立. 要注意对所有可能的反面结果都要逐一进行讨论. 例如第 3 章 N.18，C_p 不等式及其推广的证明，第 3 章 N132，第 5 章 §1. N21，62，第 6 章 §2. N5. 第 6 章 §3. N4，18，19，第 7 章 §1. N47，第 11 章 §1. N69，70，第 12 章 §3. N21 等.

4.　**放缩法**：要证 $a<b$，又已知(或易证)$a<c$，则只要证 $c<b$，这是利用不等式的传递性，将原不等式里的某些项适当放大或缩小，或舍去若干项等，例如第 5 章 §1. N12. [345]1986，1：16 － 20 等.

5.　**数学归纳法**：与自然数 n 有关的许多不等式，可考虑用数学归纳法证明. 但要注意：

第一，数学归纳法有多种形式. 李大元就证明了下述七种等价的形式：设 $P(n)$ 是与 n 有关的命题，则

(1)　设 $P(n_0)$ 成立，且对于任意 $k>n_0$，从 $P(k)$ 成立可推出 $P(k+1)$ 成立，则 $P(n)$ 对所大于 n_0 的 n 都成立.

(2)　设 m 是任给的自然数，若 $P(1)$ 成立，且从 $P(k)(1\leqslant k<m)$ 成立可推出 $P(k+1)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有不超过 m 的 n 都成立.

(3)　(反向归纳法) 设有无穷多个自然数 n(例如 $n=2^m$)，使得 $P(n)$ 成立，且从 $P(k+1)$ 成立可推出 $P(k)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有 n 成立. 例如，证 A-G 不等式时，从 $n=2$ 成立证 $n=3$ 成立就比较困难，而证 $n=4$ 成立则可成对搭配，由此想到第一步应先证 $n=2^k$ 时成立(称为超前归纳)，第二步再证：若 $n=k(k\geqslant 2)$ 时命题成立，则 $n=k-1$ 时命题也成立(称为反向归纳).

(4)　若 $P(1)$ 成立，且 $P(n)$ 对所有满足 $1\leqslant n\leqslant k$ 的 n 成立可推出 $P(k+1)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有 n 成立.

(5)　(最小数原理) 自然数集的非空子集中必有一个最小数. 见第 2 章 §2. 七. N. 7.

(6)　若 $P(1)$，$P(2)$ 成立，且若 $P(k)$，$P(k+1)$ 成立可推出 $P(k+2)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有 n 成立；

(7)　(无穷递降法) 若 $P(n)$ 对某个 n 成立可推出存在 $n_1<n$，使得 $P(n_1)$ 成立，则 $P(n)$ 对所有 n 成立，(见"数学教学"1987，3:3 − 6).

此外，还有螺旋归纳法(又叫翘翘板归纳法)：设有两个命题 $P(n)$，$Q(n)$，若 $P(1)$ 成立，又从 $P(k)$ 成立可推出 $Q(k)$ 成立，并且从 $Q(k)$ 成立可推出 $P(k+1)$ 成立，其中 k 为任给自然数，则 $P(n)$，$Q(n)$ 对所有 n 都成立，它可推广到两个以上的命题. 见华罗庚的《数学归纳法》，上海教育出版社 1964，李成章[99]1991(6 − 9)：152 − 162.

这些形式虽然等价，但在不同情形中使用各有方便之处. 在使用它们时，若能注意运用变形和放缩等技巧，往往可收到化难为易的奇效.

例如，第 1 章 §3 AG 不等式从 $G_n\leqslant A_n$ 推出 $G_{n+1}\leqslant A_{n+1}$，就总结了六种不同的技巧；用数学归纳法直接证 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2$ 失效，而使用"加强命题" 技巧，易证 $S_n<2-\frac{1}{n}$；同样，第 2 章 §3 N12 中用数学归纳法直接证 $S_m\leqslant 1-\frac{1}{2^m}$ 很困难，但证 $S_m\leqslant\frac{1}{n_0}(1-\frac{1}{2^m})$ 却容易；又如第 11 章 §1 N9. 数学竞赛的命题者给出的证明用了四次数学归纳法，而使用"加强命题" 技巧，只用了一次数学归纳法就得出所需的结论；第 11 章 §1 N61. 直接用数学归纳法证 $A_{n+1}>B_n$ 也很困难，通过"加强命题" 技巧，却易证 $A_{n+1}>3B_n$；有些不等式与两个独立的自然数 m，n 有关，可考虑用二重数学归纳法，即若要证命题 $P(m,n)$ 对所有 m，n 成立，可分两步：① 先证 $P(1,n)$，$P(m,1)$ 对所有 m，n 成立；② 设 $P(m+1,n)$，$P(m,n+1)$ 成立，证明 $P(m+1,n+1)$ 也成立. 例如见第二章 §2 N21. .

第二，数学归纳法与其他方法的综合运用，例如第 6 章 §3 N. 4. (3)，证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx>0$，$(0<x<\pi)$ 就要综合运用数学归纳法，反证法与极值法；有时可将 n 换成连续量 x，用微分法或积分法. 第 3 章 N72. Weierstrass 不等式可用数学归纳法，也可用概率论方法.

第三，并不是所有含 n 的不等式都能用数学归纳法证明的. 例如第 9 章 §2 Bieberbach 猜想，第 3 章 N. 156. Shapiro 猜想等.

还可参看第2章 §1.第3章N76,85,139,142,153,第4章 §2.N80;第5章 §1 N70,第6章 §1 N4;第7章 §1.N.1.,第9章 §1.N31,第10章 §1N.7;第11章 §1.N7,10,14,17,19,21,26,27,30,49;第13章N.34,63等,都从不同侧面反映了使用数学归纳法的各种技巧.

6. **换元法**:设 a,b,c 为三角形边长,作换元:$x=(b+c-a)/2, y=(c+a-b)/2, z=(a+b-c)/2$,就可将几何不等式 $f(a,b,c)\geqslant 0$ 转化为正数 x,y,z 的代数不等式 $g(x,y,z)\geqslant 0$.更一般地,若对于所有非负实数 $x_k, 1\leqslant k\leqslant n, F(x_1,\cdots,x_n)\geqslant 0$,令 $y_k=\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)$,使得 $y_k\geqslant 0(1\leqslant k\leqslant n)$,则 $F(y_1,\cdots,y_n)\geqslant 0$.适当选取不同的 φ_k,可以统一证明许多几何不等式、代数不等式和其他不等式;有的代数不等式,可作三角代换,例如,在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的条件下,可考虑设 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,(0\leqslant r\leqslant 1)$,但有时则失效(如设 $x^2+y^2\leqslant 1$,要证 $3\leqslant |x+y|+|y+1|+|2y-x-4|\leqslant 7$ 作三角代换无用,这时可利用 $1+y\geqslant 0, 4-2y+x\geqslant 0$ 化为 $-2\leqslant |x+y|+x-y\leqslant 2$;反之,有些三角不等式,可作万能代换 $t=\operatorname{tg}(x/2)$ 或用正弦定理等化为代数不等式(应注意可能引起定义域的改变),例如见第5章 §1 N15.

7. **抛物线技巧(包括配方与判别式法)**:某些代数式配方后,化为 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的形式,若 $a>0$,则 $\Delta=b^2-4ac\leqslant 0$ 等价于 $f(x)\geqslant 0$.有些 $f(x)$ 形式上不是代数式,例如,$f(x)=a\sin x\cos x+b(\sin x+\cos x)+1(a>0)$,令 $t=\sin x+\cos x$,就可化为 t 的二次三项式;在证柯西不等式等类似问题时,还可构造二次三项式;第6章 §1 N1,2 中的抛物线不等式,看起来简单,却是很有用的抛物线技巧.有时可利用卡丹公式:三次代数多项式 $f(x)=x^3+px+q$ 有三个实根的充要条件是判别式 $(q/2)^2+(p/3)^3\leqslant 0$.通过判别式,第3章N5(1)将二元函数不等式转化为一元函数不等式,此外见第3章N7,52,113;第5章 §1 N55;第9章 §1 N24.等.

8. **松驰变量法(引入参数法)**:它的基本思想是引入新的变量(称为松驰变量),将不等式转化为等式处理.例如要证 $\sum a_kx_k\leqslant b$,可引入松驰变量 y,用 $\sum a_kx_k+y=b, y\geqslant 0$ 来代替,从而可用各种恒等变换技巧.若关系式中出现隐含条件 $x_k\geqslant c_k(c_k\neq 0)$,则可引入新变量 y_k;并令 $x_k=y_k+c_k$,将它代入关系式中消去 x_k,则 $x_k\geqslant c_k$ 就变成 $y_k\geqslant 0$;对于各种平均不等式,Hölder 不等式,也可引入参数,见李成章的文章[99]2,(1989),32-37;若 $a\geqslant b\geqslant c$,则可令 $x=a-c, y=b-c$,于是将问题转化为对非负数 x,y 进行推导.可参见第3章N48,49.

9. **几何证法**:除了用几何方法证明几何不等式外,利用三个正数 a,b,c 能构成三角形边长的各种条件,可以沟通代数不等式与几何不等式,因而某些代数不等式可用平面几何方法,立体几何方法或解析几何方法;利用三角形的边角关系,如正弦定理,余弦定理、正切定理、射影定理、面积公式、半角公式等,可将三角形边长与内角的不等式相互转化.Fourier 级数理论中的 Bessel 不等式也可用几何方法证明.见第3章N36,38,39,54,128,133;第5章 §1N134等.

10. **复数证法**:除了用它证明第9章中的不等式外,还可证明积分不等式(注意到用复变函数论中留数理论可以计算积分);某些初等不等式用复数方法可以得到简捷的证

明,如第 3 章 $N38$ 既可用平面几何方法(构造直角三角形),也可用复数三角不等式;甚至某些含自然数的不等式,也用到复变函数理论.见第 2 章 §1 N.12;第 3 章 N157(Hilbert 不等式);第 4 章 §1N19(28);第 5 章 §1N.8.,还有胡克[121]中的 Milin-Lebejev 方法等.

11.　逐步调整法: 1984 年陈永林证明了逐步调整法的一般形式:设 f 定义在集 D 上,若对 D 中任意 $x_k, y_k, k=1,2, x_1+x_2=y_1+y_2$ 满足:$f(x_1)+f(x_2)<f(y_1)+f(y_2) \Leftrightarrow |y_1-y_2|<|x_1-x_2|$,则对 D 中任意一组数 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$,有 $\sum f(x_k)\leqslant nf(c)$;若 f 在 D 上恒为正,且 $x_1+x_2=y_1+y_2$,满足 $f(x_1)f(x_2)<f(y_1)f(y_2)\Leftrightarrow |y_1-y_2|<|x_1-x_2|$,则对 D 中任意一组数 $x_k(1\leqslant k\leqslant n)$,有 $\prod f(x_k)\leqslant (f(c))^n$,仅当所有 x_k 相等时等号成立,式中 $c=\frac{1}{n}\sum x_k$. 可由此发现和统一证明许多几何不等式、三角不等式,A-G 不等式、Chebyshev 不等式等,详见[345]1984,12:18 – 19,34. 南京师院学报 1982,3:65.

1989 年华强将逐步调整法推广到多元函数 $y=f(x)$,式中 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$. 若 $\sum x_k=nc$,且对任意 $1\leqslant i<j\leqslant n$,固定 $x_k(k\neq i,j)$,y 随 $|x_i-x_j|$ 的减小而减小,则 $f(x)\geqslant f(\bar{c})$,式中 $\bar{c}=(c,\cdots,c)$. 若 y 随 $|x_i-x_j|$ 的减小而增加,则不等号反向. 若 $\prod x_k=c^n$,也有类似的结论. 特别,若 $y=f(x)$ 关于 $x_1,\cdots,x_n$ 对称(即将其中任何两个量对换后,表达式都不变),则 y 随 $|x_i-x_j|$ 减小时变化的性质只要考查 x_1,x_2 即可. 例如,第 3 章 N150,第 5 章 §1N73,另见[99]4(1989)64 – 72.

12.　面积、体积比较法: 按积分的几何意义,证明某些积分不等式,例如第 13 章 N1(9)Polya 不等式可归结为面积或体积大小的比较;又积分作为积分和的极限,某些代数不等式,数列或级数不等式也可归结为面积、体积的比较(当然可推广到集合测度大小的比较),见第 3 章 N112.133. 第 4 章 §1 六.N19.

13.　抽屉原理(又叫鸽舍原理,或狄利克雷原理): 设有 $n+1$ 个(或更多)物体装入 n 个盒子,则至少有一个盒子装有两个物体,或更一般地,设有 $m_1+\cdots+m_n+1$ 个(或更多)物体放在 n 个盒子中,那末不管如何放,下述 n 个事件中总有一个成立:第 k 个盒子中至少有 m_k+1 个物体($1\leqslant k\leqslant n$). 抽屉原理看起来非常简单,也容易用反证法证明它. 但如何设计具体的"抽屉"时,却变化多,技巧性强,因而应用广泛,特别是用于数论和组合数学中.

某些几何与分析问题也可转化为利用抽屉原理. 例如,若 n 个图形面积之和小于 S,则不能用它们来覆盖面积为 S 的图形;若 n 个正数的算术平均大于 a,则在这些数中至少有一个数大于 a 等.

在抽屉原理的推广中,有著名的**瑞姆塞定理**:设集合 S 中有 n 个元素. S 的子集中只有 m 个元素的子集有 $r=\binom{n}{m}$ 个,记为 $A_1^{(m)},\cdots,A_r^{(m)}$,把这种子集的全体分成互不相交的 k 类,则对于任意自然数 $n_j\geqslant m$,$1\leqslant j\leqslant k$,只要 n 充分大,下述 k 个事件中总有一个成立:

存在 S 的一个有 n_j 个元素的子集 S_j，S_j 的任意一个具有 m 个元素的子集都在第 j 类中，$1 \leqslant j \leqslant k$.

使上述定理成立的最小数 n，称为瑞姆赛数，它与 $m, n_j(1 \leqslant j \leqslant k)$ 有关.对于一般给定的的 $n_j \geqslant m, 1 \leqslant j \leqslant k$，如何求出瑞姆赛数，是一个难题，目前只有一些特殊结果.

见第 2 章 §3N15 连分数不等式，特别是 Dirichlet 不等式，Hurwitz 不等式的证明；第 3 章 N52，62；第 4 章 §1 六，N18.

14. **排列组合方法：**除了用于证明第 2 章组合数不等式外，还可用于证明某些数论函数不等式，例如第 2 章 §2，六，[345]1982，4：31 - 32.

15. **函数的单调性：**利用函数的单调性，不但可以证明许多不等式，还是发现和构造新不等式的基本工具，第 8 章 §1 详细叙述了函数单调性概念的各种推广及其单调性判别法.此外，可见第 1 章 §3 AG 不等式，Fan Ky 不等式的加权形式，第 2 章 §1 - N16；第 5 章 §N.1；2；12，15，§3.N.55.等的证明.

16. **凸函数方法：**第 7 章 §1 对凸函数基本概念及其推广，各种凸函数不等式作了详细论述，这是构造和证明大批不等式的基本方法.例如第 1 章 §3，证明 AG 不等式：(3.31) 与(3.171) 式的证明；第 3 章 N.18(C_p 不等式)，N27(Young 不等式)；N73；78.

17. **利用中值定理：**包括微分中值定理和积分中值定理，例如第 13 章 N41 的证明中这两个中值定理都要用到.在现行数学分析教材中，它们都写成等式形式，例如 $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$，式中的 c，只知道与 a, b, f 有关.但对于许多应用来说，只要知道导数 $f'(x)$ 的上、下界：$m \leqslant f'(x) \leqslant M$，就得出不等式：

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M.$$

因此，[74] 第八章指出，中值定理的实质是由不等式的形式揭示出来的.可导条件可减弱为存在单侧导数 $f'_-(x), f'_+(x)$，或 Dini 导数.见第 12 章 §3.N1，32，47；第 13 章 N9，13，41.

18. **极值方法：**包括 Lagrange 乘数法、最小二乘法等.[1] 指出，函数的极值理论是发现和证明不等式的万能武器.其中第 1 章 §3 证 AG 不等式与第 3 章 N.9 的变形技巧；第 3 章 N48，49，51.利用变量的对称性，用局部固定法，将多元函数的极值转化为一元函数的极值处理；见第 3 章 N.92.

最小二乘法是根据一组数据(x_k, y_k)，$1 \leqslant k \leqslant n$，(一般由实验或观测而得)，找出一个给定类型的函数 $y = f(x)$，要求确定 f 中的参数，使得 $\sum [f(x_k) - y_k]^2$ 为最小.

第 1 章 §3 证明 Fan Ky 不等式的加权形式，第 3 章 N1.55；第 5 章 §1 N69；第 9 章 §1N.5.等的证明技巧，都值得注意.

优化和非线性规划中的罚函数法是一种把带约束极值问题归结为无约束优化问题的方法.例如，考虑 R^n 中的集合 $E = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : f_k(x) \geqslant 0, 1 \leqslant k \leqslant m\}$ 上的函数 φ 的极小化问题.罚函数 $\psi(x, \alpha)$ 具有以下性质：若 $x \in E$ 则 $\psi(x, \alpha) = 0$；若 $x \notin E$，则 $\psi(x, \alpha) > 0$，设 $x(\alpha)$ 是任何使 $M(x, \alpha) = \varphi(x) + \psi(x, \alpha)$ 取无约束(整体) 最小值的点，$\varphi(x, \alpha)$ 的选取方法是：点 $x(\alpha)$ 与原问题的解集 A 的距离 $d(x(\alpha), A) \to 0 (\alpha \to \infty)$；否则，就使

得$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\varphi(x(\alpha))=\inf\{\varphi(x):x\in E\}$.例如,可取$\psi(x,\alpha)=\alpha\sum\limits_{k=1}^{m}|\min\{f_k(x),0\}|^q, q\geqslant 1$,常取 $q=2$.

罚函数法的更一般的提法:将 $\varphi(x)$ 在集合 E 上的极小化问题,归结为某个参数函数 $M(x,\alpha)$ 在一个从应用数值极小化方法的有效性观点来看比原来的集合 E 结构简单的集合上的极小化问题.20 世纪 80 年代以来又进一步发展为乘子罚函数法(或增广 Lagrange 函数法). R^n 中的 E 也推广为 Banach 空间的子空间等.

19.　幂级数方法: 要证 $f(x)\leqslant g(x),(|x|<a)$,若 f,g 在区间 $(-a,a)$ 上可以展开成幂级数:$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n, g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$,则只要证明对所有 n,成立 $a_n\leqslant b_n$.由此可以统一证明许多不等式,还可以发现新的不等式;对于收敛的交错级数的和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n=S$,当 $a_n>0, a_n>a_{n-1}(n=0,1,2,\cdots)$ 时,有 $S_{2n+1}<S<S_{2n}$,其中 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^ka_k$;有时还要与放缩技巧等其他方法结合使用.典型的证明技巧可参看第1章AG不等式;第2章§1N8,11;第 3 章 N8,11,145;第 5 章 §1N4; §2N1; §3N14,41,54 等.

20.　母函数方法: 对于给定的数列 $\{a_n\}$,可以构造一个形式幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,称为 $\{a_n\}$ 的母函数,而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n/n!$称为$\{a_n\}$ 的指数型母函数.于是就把对数列不等式的研究转化为函数不等式的研究.我们还可以定义函数列$\{f_n(x)\}$ 的母函数 $F(x,t)$:若 F 能通过形式运算(即不管这种运算是否合理)能展开成 t 的幂级数:$F(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nf_n(x)t^n$,不论该级数是否收敛,只要 $f_n(x)$ 有意义,就称 $F(x,t)$ 是$\{f_n(x)\}$ 的母函数.例如,从母函数

$$(1-3xt+t^2)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

就得到勒让德多项式 $P_n(x)$.其他特殊函数,如雅可比多项式、Euler 多项式、埃尔米特多项式、拉盖尔多项式等都有相应的母函数(见第 6 章 §2).

早在 18 世纪,欧拉就利用自然数 n 的分拆数 $r(n)$ 的母函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}r(n)x^n$ 来研究 $r(n)$, 见第 2 章 §2. 六. 在数论中还经常用到 Dirichlet 级数型的母函数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a(n)n^{-s}$,到 19 世纪,拉普拉斯研究概率问题,发展成为一般的方法,导致把对分布函数的研究转化为对它的特征函数的研究.近代拉普拉斯变换、Fourier 变换等各种积分变换,都是母函数方法的推广.见专著[111],史济怀《母函数》,上海教育出版社 1981,沈燮昌等《母函数的作用》[353]1998,14(1-2).

21.　Fourier 分析与小波分析方法: Fourier 级数的丰富理论已成为证明不等式的基本方法,如第4章 §3 等周不等式;第6章 §2,三;第12章 §3N9,Wirtinger 不等式等都巧

妙地用到了 Fourier 级数的逐项积分和 Parseval 公式，此外见第 11 章 §2N.51. 而第 14 章 §2N32 用到小波分析方法，还可参看[21]P508 - 511.

22. 微分方法： 为证 $f(x)<g(x)$，有时归结为证 $f'(x)<g'(x)$，可使问题简化，例如第 1 章 §3 AG 不等式的证明，第 3 章中许多代数不等式的证明. 第 13 章 N1,57,73, 等一类积分不等式，常将积分上限 b 换成变量 x，即 $\int_a^b f$ 变成 $F(x)=\int_a^x f$，对 F 求导数，这往往是十分有效的证明技巧.

23. 差分法： 第 12 章 §1 - 2，第 14 章 N20，详见徐利治等[8] 和 L.M. Milne-Thomson, The Calculus of Finite Differences, Macmillan, London, 1951.

事实上，有限差分的理论是微分学的原始形式，在历史上，微分学正是由有限差分的理论产生的，所以，差分与微分有类似的性质，而且差分、差商与导数有密切的联系，见[124] 第 2 章 §4.

24. 变分法： 变分法的核心问题是求泛函的极值函数和相应的极值. 20 世纪以来，在动态规划与自动控制理论等的推动下，变分法有了很大的发展. 莫尔斯于 1925 年推广了伯克霍夫的极小极大原理，得出著名的莫尔斯不等式，以后形成了大范围变分法. 见 Milnor, J. Morse 理论. [1] 第 7 章专门讨论了用变分法可以建立的若干特殊的积分不等式. 本书第 13 章 N.19，作了概述. 第 4 章 §3 等周不等式的证明，以及邵品琮用变分法证明 Opial- 华罗庚不等式. 详见[353]1982,3:15 - 19. 此外见[21]P.500 - 504.

25. 积分方法： 包括用积分的性质和积分不等式. 特别是积分的单调性. 利用积分还可证明某些数列或级数不等式，除了通常的黎曼积分、勒贝格积分外，用各种新积分(例如见[95]) 来证明不等式是很有前途的新方向. 如[301]1987,127:370 - 374 就证明 G-B 不等式(第 13 章 N14.) 对于 Henstock 积分也成立. 典型的例子可见第 2 章 §1 N8 - 10, 22,25；第 2 章 §3 N.2；第 12 章 §3 N47；第 13 章 N93,113 等.

26. 概率方法： 除了证明概率不等式外，还可通过构造随机变量 ξ，利用概率不等式来证明和推广许多著名的不等式，并得到许多新的不等式. 例如，设 ξ,η 是相互独立的随机变量，从 $D(\xi\eta)=D\xi\cdot D\eta+(E\xi)^2D\eta+D\xi\cdot(E\eta)^2$ 得到 $D\xi\cdot D\eta\leqslant D(\xi\eta)$. 从而有

$$D(E\xi)^2(E\eta)^2\leqslant E\xi^2(E\eta)^2+(E\xi)^2E\eta^2. \tag{26.1}$$

给定实数列 $\{a_k\},\{b_k\}$，可构造二维离散型随机变量 (ξ,η)，使其概率质量函数为 $P(\xi=a_k,\eta=b_k)=1/n^2, k,j=1,2,\cdots,n$，则从(26.1) 式可得不等式

$$\left(\sum a_k\right)^2\left(\sum b_k\right)^2\leqslant(n/2)\left[\left(\sum a_k^2\right)\left(\sum b_k\right)^2+\left(\sum a_k\right)^2\left(\sum b_k^2\right)\right];$$

若 $\{a_k\},\{b_k\}$ 是正的无穷数列，则可构造二维随机变量 (ξ,η)，使其概率质量函数为

$P(\xi=x_k,\eta=y_j)=(a_kb_j)/(ab), k,j=1,2,\cdots$，式中 $a=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k, b=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$. 于是 (ξ,η) 的边缘分布为

$$P(\xi=x_k)=a_k/a, P(\eta=y_j)=b_j/b,$$

则从(26.1) 式，可得

$$(\sum a_k x_k)^2(\sum b_k y_k)^2 \leqslant (1/2)[(\sum a_k)(\sum a_k x_k^2)(\sum b_k y_k)^2 + (\sum b_k)(\sum a_k x_k)^2(\sum b_k y_k^2)].$$

上述概率证法的要点是:先构造一个概率分布为已知的随机变量 ξ,若要证与数列 $\{x_k\}$ 求和有关的不等式,则 ξ 的概率质量函数为

$$P(\xi = x_k) = p_k. \tag{26.2}$$

(26.2) 式中 ξ 的取值就是数列中的 x_k,而取各个值的 p_k 则视具体情况而定;若有几个数列,就相应构造几维随机变量.若要证的是积分不等式,则该 ξ 的概率密度函数 f 就是这积分中被积函数的某一因式,然后利用概率论中某些与数学期望有关的不等式.详见戴朝寿的两篇文章:[353]1985,11(2):51 - 54,33;1988,14(2):85 - 90;和 1991,17(2):83 - 85.[351]2000,3:2 - 4;2000,5 - 6:14.

利用(概率) 熵理论和随机积分证明不等式,可见[54]5:411 - 417,Tokyo J.Math. 1988,11(2):323 - 328 等.还有一种度量熵,广泛用于调和分析与逼近论、各种抽象空间的算子理论上,也是证明不等式的现代工具.

典型的证明技巧见第 1 章 §3 AG 不等式的证明,第 3 章 N.17,18,31,72;第 13 章 N68,135,136;第 14 章 §2 N6,8,第 15 章则是概率统计不等式.另见石焕南[351]2000,3:2 - 4;5 - 6:14;1998,2:17 - 18,[344]2002,32(1):132 - 135,高等数学研究 1999 年专刊:31 - 33;山东师大学报 2002,17(1):12 - 14;[402]1996,12(3):146 - 149 等.

27.　优化理论:利用优化不等式(又称控制不等式,见第 7 章 §1N.7.)可以统一证明许多代数不等式、几何不等式、矩阵不等式和凸函数不等式,第 3 章 N.72,第 15 章 §1N29,34,[345]1985,9:35 - 37,12,及专著[6],[9],[54]3 等.

1989 年赖炎连通过讨论三种类型的约束优化问题,利用 Kuhn-Tucker 条件推出著名的钟开莱不等式,A-G 不等式,Hölder 不等式及其推广等,见广西大学学报 1989,2:44 - 52,石焕南利用优化理论卓有成效地证明了大批代数不等式和概率统计不等式.例如[100]323 - 327;东北师大学报 2001,33(增刊):24 - 27;四川师大学报 2002,25(5):510 - 511;[351]1998,2;5:19 - 22;6:53;1999,1:2 - 4;2:3 - 5;3:9 - 11;2000,3:1 - 2;4:12 - 15;2001,1:9 - 11,2:5 - 7.2003 年元月,石焕南还整理了 20 世纪 90 年代以来发表的控制不等式文献,国内 52 篇,国外 11 篇,专著 5 部.

28.　支撑函数方法:利用支撑不等式(见第 7 章 §1N28.)可以证明许多基本不等式,行列式不等式、初等对称多项式不等式(第 3 章 N132) 等,详见[301]1986,117:23 - 41.

29.　Benson 方法:这个方法的要点是:(1) 选择一个适当的代数不等式来证明一个包含函数及其导数的表达式是非负的;(2) 将不等式适当变形,如两边加上一个恰当导数;(3) 对不等式两边积分.利用这个方法可以证明大量已知的基本不等式,例如第 1 章的不等式和第 6 章 §1 N.12;第 12 章 §2N.9;第 13 章 N.7.等.Benson 以下述为例:

(1) 从代数不等式　$x^{2n} - 2nx + 2n - 1 \geqslant 0$　(29.1)

出发,对于连续可微函数 $u(x),P(u,x),G(u,x),P(u,x) > 0$,

取 $x=u'\left(\frac{P}{G'_u}\right)^{\frac{1}{2n-1}}$,并用$\left(\frac{(G'_u)^{2n}}{P}\right)^{\frac{1}{2n-1}}$乘(29.1)式两边,得到

$$P(u')^{2n}+(2n-1)\left[\frac{(G'_u)^{2n}}{P}\right]^{\frac{1}{2n-1}}-2nu'G'_u\geqslant 0; \tag{29.2}$$

(2)　在(29.2)式两边加上 $2nG'_x(u(x),x)$;

(3)　从 a 到 b 积分,即得

$$\int_a^b\left[P(u')^{2n}+(2n-1)\left(\frac{(G'_u)^{2n}}{P}\right)^{\frac{1}{2n-1}}+2nG'_x\right]\mathrm{d}x\geqslant 2nG[u(b),b]-G(u(a),a).$$

仅当 $u'=\left(\frac{(G'_u)^{2n}}{P}\right)^{\frac{1}{2n-1}}$ 时等号成立. 详见[4]§2.10 和[21]P515 - 520.

30.　逻辑推理方法:例如见第 2 章 §3N17. 第 9 章 §1N10. 后者是 1987 年上海市中学生数学竞赛题. 可参看常庚哲等,高中数学竞赛辅导讲座,上海科学技术出版社,1987, P.124 - 137.

31.　数论方法:数论中各种分拆技巧、模函数论方法、Tauber 型方法、解析数论方法、筛法理论、素数分布理论、各种数论函数、三角和及特征和、渐近法与连分数等都是常用的方法. 筛函数的上下界估计等,往往还要用到高深的分析技巧. 例如见第 2 章 §1 N.16;第 2 章 §3 N.15;第 5 章 §1 N.6. 专著[17,18,76,89,93].

32.　重排方法:函数的重排是将一个测度空间上的可测函数 f 用它的重排函数 f^* 来代替,f^* 与 f 有相同的分布函数,而 f 的分布函数与重排函数是比原来 f 好处理的对象,因而在积分不等式的建立和证明中很有用处,我们在第 13 章 N20,21 介绍了这些概念及其基本性质,利用好 λ 不等式(见第 13 章 $N20(6)$),可以通过对分布函数的估计得到函数间的积分不等式,因此函数的重排方法就成为发现和证明积分不等式的基本方法之一. Hardy 等在[1]中用了专门的一章(第 10 章)来讨论重排方法,得到了大批著名的不等式. 还有相应的离散量的重排,见第 2 章 §1 N1. 第 3 章 N86,87,95,第 4 章中许多几何不等式的证明,第 7 章 §1 N50. 第 8 章 §1 N15,16;第 11 章 §2. N47,第 12 章 §3 N.5. 第 13 章 N20. 等,[345]1986,8:26 - 28. 有关专著见[55,61,64,65,68,72,92,132].

33.　利用极限的性质:除了运用熟知的极限的单调性、保号性、有界性(对于函数极限是局部有界性)等(如第 3 章 N9,18,第 6 章 §3. N4.)还经常用到上、下极限、上、下确界的性质,见第 8 章 §3,也可构造稠密点集,使得对这些特殊点集成立的不等式过渡到更一般点集都成立的不等式,见第 1 章 §1,四(不等式延拓原理)等. 还可利用已知的极限.

34.　利用行列式、矩阵的性质:除了用于证明第 10 章的有关不等式外,还可以证明许多代数不等式和几何不等式. 例如,实二次型可用矩阵表示:

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_jx_k=X'AX,\text{式中}$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

$X' = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$a_{jk} = a_{kj}$. f 为正定的充要条件中，要求 f 的系数矩阵 $A = (a_{jk})$ 的 n 个顺序主子行列式 D_k 都大于零，即

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0,$$ 而 f 为负定的充要条件则要求 $(-1)^k D_k > 0, k = 1, 2, \cdots, n$，

对于要证明某些特殊的代数不等式：$a \leqslant b$，可找一映射 φ，使得矩阵 B 对应于代数表达式 b：$b = \varphi(B)$，再对 B 作行变换得到矩阵 A，使得 $a = \varphi(A)$. 例如，可用这种方法证明 $8abc \leqslant (a+b)(b+c)(c+a)$，式中 a, b, c 为非负数. 详见 Eurocal Leipzig 1987, 87: 403－411, Lecture Notes in Comput. Sci 378, Springer 1989 和本书第 1 章. §1 和[12,13]，[54]2. 等.

35.　拟线性化方法：设 X, Y 是两个赋范线性空间，$L(x, y)$ 是 $X \times Y$ 上的函数，$\| y \|$ 是 y 在 Y 中的范数. 由 $L(x, y)$ 定义一个新的函数

$$\varphi(x) = \max\{L(x, y): \| y \| \leqslant 1\}. \tag{35.1}$$

于是，$L(x, y)$ 作为 x 的函数对所有 y 都成立的某些性质，例如正性、线性、凸性等都将反映到 $\varphi(x)$ 的相应性质之中. 而 $L(x, y)$ 的这些性质往往比 $\varphi(x)$ 的相应性质更容易证明，这就是所谓**拟线性化技巧**. 例如，若对于所有 y，$L(x, y)$ 是 x 的线性泛函，即

$$L(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha L(x_1, y) + \beta L(x_2, y),$$

则　$\varphi(x_1 + x_2) \leqslant \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$，即得到 φ 的次可加性；又如，利用拟线性化技巧，将 Hölder 不等式写成等式形式：

$\| a \|_p = \max\{\sum |a_k b_k| : \| b \|_q \leqslant 1, p > 1, 1/p + 1/q = 1\}$，令

$R(x) = \{x = (x_1, \cdots, x_n): \| x \|_q \leqslant 1, p > 1, 1/p + 1/q = 1\}$，则

$\| a + b \|_p = \max\limits_{R(x)}\{\sum(|a_k| + |b_k|)|x_k|\} \leqslant \max\limits_{R(x)}\sum |a_k x_k| + \max\limits_{R(x)}\sum |b_k x_k|$
$= \| a \|_p + \| b \|_p$. 这就是 Minkowski 不等式.

有时在(35.1)式中 max 要换成 sup. 例如积分形式的 Hölder 不等式可写成：

$$\| f \|_p = \sup\{\int |fg| : \| g \|_q \leqslant 1, p > 1, 1/p + 1/q = 1\}. \tag{35.2}$$

见第 1 章 §2，第 13 章 N69. [2] 第 1 章 §19－26 等. 这些技巧还广泛用于 Fourier 分析与小波分析，矩阵分析，变分法等分支中，如第 13 章中各种极大函数，BMO 空间等.

36.　变换方法：除了本书提到的连续量的各种变换，如 Fourier 变换，Laplace 变换等，常用的离散量变换有：

(1)　**Abel 变换**：见第 2 章 §1，一，第 3 章 N82，第 6 章 §3 N32,34 等，[8] 详细介绍了 Abel 变换技巧.

(2)　**Möbius 变换**：见第 9 章 §2 N4.

(3)　**级数的 Kummer 变换**：已知无穷级数 $\sum a_k$ 收敛，$\sum b_k = B$，且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k / b_k = \lambda \neq 0$，则 $\sum a_k = \lambda B + \sum(1 - \lambda b_k / a_k) a_k$.

(4)　**级数的 Euler 变换**：设 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = S$，则

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k2^{-(k+1)}\Delta^k a_0,\text{式中}\quad \Delta^k a_0=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}a_{k-j}.$$

此外,还有**斯特林变换、组合变换**,第 3 章 N82,95;第 12 章 §2 N5.的卷积变换技巧等.

37. 利用不动点定理:设 $x_{n+1}=f(x_n)$,若连续函数 f 有不动点 a,即 $f(x)=x$ 有实根 a.当 f 递增时,若 $x<a$ 时 $f(x)>x$,而 $x>a$ 时 $f(x)<x$,则当 $x_1<a$ 时,$\{x_n\}$ 为递增数列,而当 $x_1>a$ 时,$\{x_n\}$ 为递减数列;当 f 递减时,若 $x<a$ 时,$f[f(x)]>x$.而 $x>a$ 时 $f[f(x)]<x$,则对任意自然数 n,有

$$x_{2n-1}<x_{2n+1}<a<x_{2n}<x_{2(n-1)}.$$

可由此统一证明许多由递推关系式确定的数列不等式.见第 11 章 §1N62.和[348]1989,9:10－13.马意海的"广义极小极大不等式及不动点定理"("应用数学与力学"1991,12(5):465－472).

反之,也可利用不等式的性质找不动点.例如,设 $f:N\to N$ 满足 $f(n+1)>f(f(n))$,则所有的 n 都是 f 的不动点,即 $f(n)=n$.(19 届 IMO).第 6 章 §2N26.还用到泛函分析的对偶定理.

1997 年,Momcilo,B.进一步考虑了赋范线性空间 X 上的泛函 $f:X\to R^1$,为了研究 f 的极小值,即 $f(x)\geqslant a,\forall x\in X$,通过寻找映射 $F:X\to X$,使得 F 关于 f 单调,即 $f(F(x))\leqslant f(x),\forall x\in X$,仅当在 F 的不动点等号成立,类似寻找映射族的公共不动点集来研究 f 的极小集.详见[403]1997,30(4):2325－2328.

38. 覆盖方法:通过构造易求面积的特殊图形的集合,然后用其并集覆盖所研究的图形,根据面积原理,便可证明和发展许多几何不等式,见第 4 章.从有限覆盖定理到可数覆盖(Lindelöf 定理)、Vitali-Wiener 覆盖、Whitney 覆盖、Besicovitch 覆盖、各种嵌入技巧等,都是处理各种困难问题的有力工具.见第 13～16 章和[65]、[75]、[86]、[132]、[141]等.

39. 物理方法:将不等式用一个适当的物理模型来描述,然后根据物理定律来作证明.例如 1887 年 Rogers,L.J.在"数学使者"上发表了一个不等式,Hölder 发现其表达式看上去像质心公式.他推出了获得这种不等式的一般方法,若质量分布在向下凸的曲线 $y=f(x)$ 上,则其质心在该曲线的上方,其代数表达式是一个不等式.Hölder 试了各种函数 f,得到相应的不等式中,大部分是已知的,但有一个是新的,就是著名的 Hölder 不等式;用物理方法证 A-G 不等式可见 Bull. Inst. Math. Appl. 1985,192(21);根据势能最小原理(当一个力学系统处于稳定静止状态时所具有的势能最小),得到偏微分方程中的**能量不等式**.见第 13 章 N26;反之,变分不等式和变分原理为固体力学的现代发展提供了统一的框架和有力工具.1989 年郭友中系统研究了固体力学中的不等式问题,见"应用数学和力学"1989,10,(1):1－21.本书第 4 章 §1N18,第 8 章 §1N22,还可用质心公式证;用光学、热学、电磁学等有关定律证明不等式,可见[301]1980,76:209－212 等.

40. 动态规划法:若 n 个变数 x_k 满足约束条件:$x_k\geqslant 0,g_j(x)\leqslant 0,x=(x_1,\cdots,x_n)$,其中 $1\leqslant k\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m$,求目标函数 $f(x)$ 的极值就是一个规划问题,至今还无一般解法.但动态规划法包含一些精心制订的规则,这些规则允许消去一些非同时变式,从而缩小了在其中求函数极值的集合,这是用微积分方法难以求得的最大最小值.自从 R.贝尔

曼 1953 年发表"动态规划理论导引"和 1957 年出版专著"动态规划"以来,动态规划法在理论和实际应用方面都得到迅速的发展.用这些方法可以证明比古典变分法更复杂的泛函极值问题,还可以证明许多基本不等式,例如见第 3 章 N61, [54]5:419 - 432, [345]1987,6:32 - 35 等.

41. **泛函方程法**:王中烈于 1979 - 1986 年连续发表了六篇论文,系统地阐明了如何用泛函方程法证明一大批著名的不等式,如 *Hölder* 不等式;*Minkowski* 不等式,*AG* 不等式及其各种平均不等式的推广. *Fan Ky* 不等式等,读者可参看原文[301]1979,71:423 - 430;1980,78:522 - 530;1981,80:31 - 35;1982,86:96 - 98;1983,96:119 - 129;1986,118:287 - 308.

42. **内插外推方法**:它的基本思想是,如果我们知道一个算子 T 在某个函数空间族上满足某些不等式,能否由此推出在该函数空间族的一些中间空间上(内插)或在两端空间上(外推)满足什么不等式?例如第 9 章 § 2N32(三线定理)就是 L^p 空间基本的内插定理;利用 *Marcinkiewicz* 内插定理,从

$$|\{x: |T(f,x)| > \alpha\}| \leqslant \left(\frac{A_k}{\alpha}\|f\|_{p_k}\right)^{q_k},\quad \alpha > 0. k = 1,2,$$

可推出不等式: $\|Tf\|_q \leqslant c\|f\|_p$, 式中 $f \in L^p(R^n), 0 < \theta < 1, 1/p = (1-\theta)(1/p_1) + (1/p_2), 1/q = (1-\theta)(1/q_1) + (1/q_2)$.

关于外推技巧,我们仅以 *Yano* 的结果为例:设$(\Omega,\mathscr{F},\mu)$为一测度空间,$M(\Omega)$是实或复值可测函数集合,T 是从$M(\Omega)$到 $M(\Omega)$的次线性算子.若 T 是限制(p,p)型,即对于 Ω 中任一测度为有限的可测集 E,有 $\|T\varphi_E\|_p \leqslant C_p\|\varphi_E\|_p$,式中 φ_E 为 E 的特征函数,$1 < p < 2$,常数 C_p 满足:对某个 $s > 0, C_p \leqslant c/(p-1)^s$,则 T 满足:对 Ω 中任一可测子集 $E, \mu(E) < \infty$ 和任意 $f \in L(1+\log^+ L)^s$,有

$$\int_E |Tf| \leqslant c_1(1+\mu(E)) + c_2\int_E |f|(1+\log^+ L)^s.$$

式中 c_1, c_2 与 E, f 无关.见 J. Math. Soc. Japan, 1951, 3:296 - 305.

1988 年 Bahman 等用外推方法改进了 L^p 范数和矩量的古典凸性不等式.见 Invent. Math. 1988, 306(15):651 - 654.

此外,第 14 章还用到 H^p 空间的内插方法.见[86]、[65]、[72]、[87]、[142]等.其他插值不等式见第 12 - 14 章.

43. **函数分解方法**:前面幂级数法、Fourier 级数与小波级数法实质上都是特殊的函数分解方法.此外,在近代调和分析中广泛使用的 Hardy 空间中的原子分解、分子分解、块分解、各种权函数的分解等,都成了证明不等式的现代工具.例如,当 $0 < p \leqslant 1$ 时,L^p 空间的性质不好,但在 H^p 空间中仍保持好的性质.见第 11 章,第 13 - 14. [45], [85], [86], [87], [88], [92], [125], [133], [137] 等.

44. **机械化方法**:用电子计算机辅助证明不等式,除第 5 章 § 1N103 外,还解决了许多著名的难题.例如,Shapiro 关于循环不等式的猜想的完全解决(见第 3 章 N156);证明了从封闭凸曲线 C 上某点开始,取其周长的所有三等分点,顺次用直线段连结诸点所得三

角形周长不小于 C 周长的一半；利用吴文俊关于方程解法中的零点分解定理，可以证明大量的三角不等式、几何不等式、多项式不等式等. 见 Systems Science and Math. Sci. 1988, 1(1): 1 - 17.

不等式型定理的机器证明一直被视为自动推理领域中一个困难的问题，主要原因是相关算法在本质上依赖于实代数与实几何，其计算复杂度会随着维数(参数的个数)的增加而快速增长. 杨路提出的降维算法能有效地处理含参数的根式，并能最大限度地缩减维数，根据降维算法和胞腔分解编制的 Maple 通用程序“BOTTEMA”已在 PC 上实现，该程序验证了包含上百个未解决的问题在内的上千个几何与代数不等式. 刘保乾利用该软件证明了几千个三角形不等式(见[134]). 另见林东岱等，“数学与数学机械化”，山东教育出版社，2001.

45. 信息论方法：信息论是研究信息的传输、存储、处理、分类的数学模型和质量估计. 信息传输理论主要研究信息传输的最优和拟优方法，编码和译码的最优化，信号输入和输出的变换方法，广泛用到数理统计(主要是随机过程统计)，平稳随机过程的预测和滤波理论，博奕论等，有许多结果都是以不等式的形式表达的，有兴趣的读者可参看以下几篇论文：①de Guzman, Adolfo, M., Matimyas Mat. 1990, 13(1): 1 - 10; ②Tnipathi, G. P., Kahur, J. N., “Information-theortic proofs of some inequalities”, Proc. Nat. Acad. Sci. India sect. A1991, 61(4): 481 - 493; ③Budimir, I. Matic, M., Mond, B. 等研究了 AG 不等式和 Jensen 不等式等著名不等式在信息论中的应用，见[304]2001, 2(1) Article 5, 11.

46. 对称化方法：对称化是指每个对象 F 结合一个具有某种对称性(同一类的)对象 F^*. 通常，对称化用 R^n(或常曲率空间)中的闭集 F，也用于映射；进一步，对称化构造成使得 F^* 连续依赖于 F，对称化保持对象的一些特征同时单调地改变另一些特征. 对称化被用于几何学，数学物理和函数论中极值问题的求解，第一个对称化由 Steiner 于 1836 年引进，用于等周不等式的证明，见第 4 章 §3，三.

对称化方法在函数论中的应用基于在各种形式的对称化下区域的容量与内半径改变的单调性质，例如对称化原理：设 $w = f(z)$ 是单位圆盘 D: $|z| < 1$ 内的解析函数，$f(0) = w_0$，$f'(0) = a_1$，D_f 是 $w = f(z)$ 在 D 内的值域，D_f^* 是 D_f 关于过 $w = w_0$ 的直线或射线的对称化集，$r(D_f^*, w_0)$ 是 D_f^* 关于 w_0 的内半径，则

$$r(D_f^*, w_0) \geqslant |a_1|. \tag{46.1}$$

(46.1)式中仅当 $w = f(z)$ 在 D 内单叶且 D_f^* 与 D_f 重合(在 Steiner 对称化下)或为 D_f 绕 w_0 旋转所得(在 Polya 对称化下)，可见对称化方法是不等式证明中用得十分广泛的方法之一.

47. 利用基本不等式：善于利用已知不等式，特别是基本不等式去发现和证明新的不等式，是广泛应用的基本技巧，例如各种距离空间中关于距离的三角不等式，或各种赋范线性空间中关于范数的三角不等式，要利用 Minkowski 不等式，而后者又要利用 Hölder 不等式，而 Hölder 不等式的证明和改进又依赖于 Young 不等式及其各种改进，Young 不等本身又可用积分法、微分法，凸函数方法等多种方法证明，读者可从本书中找到大量类似

的例子.

48.　**利用微分恒等式,积分恒等式,Riccati 方程**($f'(x) = -[f(x)]^2 - 1, 0 < x < \pi$)**和 Jocobi 乘子**,是[21]P.504 - 507 作为证明积分不等式的基本方法之一.

49.　**谱论方法:**这是 Mitrinovic 等在[21]第 17 章中作为积分不等式的证明方法之一.我们以特征值问题

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0 \tag{49.1}$$

为例,它有特征值 $\lambda_n = n^2 (n \in N)$ 和相应的特征函数 $y_n = \sin nx$.根据线性微分方程的谱论,我们有

$$n^2 = \lambda_n = \inf\left\{\frac{\int_0^\pi (u')^2}{\int_0^\pi u^2}; u \in D_n\right\}. \tag{49.2}$$

式中 $D_1 = \{u \in AC[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0, u' \in L^2[0,\pi]\}$,

$D_n = \{u \in D_1 : \int_0^\pi (u y_k) = 0, 1 \leqslant k \leqslant n - 1\}, n \geqslant 2$,于是得出

$$\int_0^\pi u^2 < \frac{1}{n^2}\int_0^\pi (u')^2, \tag{49.3}$$

除非 $u = c\sin nt$,式中 $u \in AC[0,\pi], u' \in L^2[0,\pi]$.

$u(0) = u(\pi) = 0, \int_0^\pi u(t)\sin kt\,dt = 0, 1 \leqslant k \leqslant n - 1$.详见[21]$P$.507 - 508.

50.　**Sturm-Louiville 问题的特征值的极小性质.**这也是 Mitrinovic 等在[21]第 17 章中作为积分不等式的证明方法之一,Sturm-Louiville 特征值问题是:

$$(ry')' + (\lambda p - q)y = 0,$$

$$\beta_a y(a) - \alpha_a r(a) y'(a) = 0, \quad \beta_b y(b) + \alpha_b r(b) y'(b) = 0,$$

式中 $p, q, r \in C[a,b], r > 0, p \geqslant 0$(但 $p \not\equiv 0$). $\alpha_a^2 + \beta_a^2 > 0, \alpha_b^2 + \beta_b^2 > 0$.

细节见[21]P.510 - 515.

应强调指出的是,不等式的证明方法远不止这 50 种,例如第 13 章 N20 函数重排不等式,好 λ 不等式都是证明算子与泛函不等式的有力工具.我们侧重的是本书所涉及到的大中学数学教学与研究及各类数学竞赛中常用的比较初等的方法.代数几何中著名的黎曼不等式,丘成桐 — 宫冈洋一关于一般型代数曲面不等式,集论拓扑学中著名的基函数不等式,图论中的不等式等的证明方法,由于涉及更为专门的数学知识,我们没有收入.就是上述 50 种证法的分类,也不一定恰当,读者需要理解这些方法的实质并根据不同的实际情况灵活加以运用.